ЛЕКЦИЯ 4

Предложение 1. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, и $f : U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, переводящая различные точки в различные. Тогда обратная функция $f^{-1} : f(U) \to U$ голоморфна.*

Доказательство. Требуется доказать, что производная $f'(a)$ не обращается в нуль ни при каком $a \in U$ — тогда результат последует из правила дифференцирования обратной функции. Предположим, что $f'(a) = 0$ и $f(a) = b$. Тогда a является нулем порядка $k \geq 2$ функции $f(z) - b$, откуда вытекает, как и в доказательстве принципа сохранения области, существование функции $h : V \to \mathbb{C}$ такой, что $f(z) = b + ((z-a)h(z))^k$ и $h(a) \neq 0$; здесь $V \subset U$ — некоторая окрестность точки a. Тем самым $f = s \circ r$, где $s(w) = b + w^k$, $r(z) = (z-a)h(z)$. Существуют сколь угодно малые по модулю числа $w_1 \neq w_2$ такие, что $w_1^k = w_2^k$; с другой стороны, $r'(a) \neq 0$ и поэтому r отображает взаимно однозначно некоторую окрестность точки a на окрестность точки $0 = r(a)$. Следовательно, найдутся две сколь угодно близкие к a точки $z_1 \neq z_2$ такие, что $r(z_1) = w_1$ и $r(z_2) = w_2$, откуда $f(z_1) = b + w_1^k = b + w_2^k = f(z_2)$, вопреки предположению о функции f. □

Предложение 2 (лемма Шварца). *Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ и $f : D \to D$ — голоморфная функция, причем $f(0) = 0$. Тогда $|f(z)| \leq |z|$ для всех $z \in D$. Если равенство $|f(z)| = |z|$ выполняется хотя бы для одного $z \in D$, $z \neq 0$, то $f(z) \equiv \alpha z$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$.*

Следствие. *В условиях леммы Шварца $|f'(0)| \leq 1$; если $|f'(0)| = 1$, то $f(z) \equiv \alpha z$.*

Доказательство леммы Шварца и следствия. Поскольку $f(0) = 0$, функция $g(z) = f(z)/z$ голоморфна во всем круге D. Пусть $0 < r < 1$, и $D_r \subset D$ — круг радиуса r с центром в начале координат. Тогда $\max_{z \in D_r} |g(z)|$ достигается в некоторой точке $z_r \in \partial D_r$, откуда $|g(z)| \leq |f(z_r)| / |z_r| \leq 1/r$ для всех $z \in D_r$. Поскольку r можно взять сколь угодно близким к 1, получим, что $|g(z)| \leq 1$ для всех $z \in D$.

Если теперь $|g(z)| = 1$ для некоторого $z_0 \in D$, то в этой точке $|g(z)|$ имеет локальный максимум. Отсюда $g(z) = const. = \alpha$ по принципу максимума модуля; очевидно, $|\alpha| = 1$.

Следствие доказывается переходом к пределу $z \to 0$. □

Комплексным многообразием размерности n называется хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, в котором зафиксирована конечная или счетная система открытых подмножеств U_α (координатных окрестностей), и для каждого α — открытое подмножество $V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ и гомеоморфизм (система координат) $r_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ так, что отображение $\varphi_{\alpha\beta} = r_\beta r_\alpha^{-1} : V_\alpha \to V_\beta$ голоморфно там, где определено. Отображение $f : M \to N$ двух комплексных многообразий называется голоморфным, если для каждой точки a и произвольных систем координат r_α^M в окрестности $U_\alpha^M \ni a$ и r_β^N в окрестности ${}_\beta^N \ni f(a)$ отображение $\varphi_\beta^N \circ f \circ (\varphi_\alpha^M)^{-1}$ голоморфно, Два комплексных многообразия M и N *биголоморфно эквивалентны*, если существует взаимно однозначное голоморфное отображение $f : M \to N$ такое, что $f^{-1} : N \to M$ также голоморфно. (Из предложения 1 вытекает, что для многообразий размерности 1 последнее требование излишне.)

Пример 1. Открытое подмножество $U \subset \mathbb{C}$ является одномерным комплексным многообразием: атлас состоит из единственной карты U, $V = U$, $r = \mathrm{id}$. Голоморфное отображение $f : M \to U$ называется голоморфной функцией.

Пример 2. $\mathbb{C}P^1$ имеет естественную структуру одномерного голоморфного многообразия (комплексной кривой). Атлас состоит из двух карт: $U_0 = \{[w_0 : w_1] \mid w_1 \neq 0\}$ и $U_\infty = \{[w_0 : w_1] \mid w_0 \neq 0\}$. Для обеих карт $V = \mathbb{C}$, а координатные отображения это $r_0([w_0 : w_1]) \stackrel{\text{def}}{=} w_0/w_1$ и $r_\infty([w_0 : w_1]) \stackrel{\text{def}}{=} w_1/w_0$. Отображение перехода $\varphi_{0\infty}$ задается равенством $\varphi_{0\infty}(z) = 1/z$.

Пусть Δ — комплексная кривая. *Мероморфная функция* на Δ это пара (f, S), где $S \subset \Delta$ — подмножество, не имеющее предельных точек, $f : \Delta \setminus S \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, и в каждой точке $a \in S$ функция f имеет полюс. Мероморфной функции можно сопоставить голоморфное отображение $\tilde{f} : \Delta \to \mathbb{C}P^1$, положив $\tilde{f}(a) = \infty (\stackrel{\text{def}}{=} [1:0])$ в произвольном полюсе $a \in S$. Действительно, пусть k — порядок полюса f в точке a. Введем в некоторой окрестности U точки a координату z; тогда при $p \in U$ имеем $f(p) = g(z(p))/(z(p) - z(a))^k$, где функция g голоморфна и $g(z(a)) \neq 0$. В карте $U_\infty \subset \mathbb{C}P^1$ имеем: $r_\infty(\tilde{f}(z(p))) = (z(p) - z(a))^k / g(z(p))$ — голоморфная функция в окрестности a. Верно и обратное: если $\tilde{f} : \Delta \to \mathbb{C}P^1$ — голоморфное отображение, не равное тождественно ∞, то множество $S = \{p \in \Delta \mid \tilde{f}(p) = \infty\}$ не имеет предельных точек по принципу аналитического продолжения. Тогда $f \stackrel{\text{def}}{=} r_0 \circ \tilde{f} : \Delta \setminus S \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, для которой $f(p) \to \infty$ при $p \to a \in S$, то есть a является полюсом.

Поскольку $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ и голоморфное отображение является бесконечно гладким, всякое n-мерное комплексное многообразие имеет естественную структуру $2n$-мерного вещественного (гладкого) многообразия. Поскольку производная голоморфного отображения сохраняет ориентацию, комплексное многообразие имеет естественную ориентацию. Тем самым на вещественном гладком многообразии M может существовать структура комплексного многообразия только если M ориентируемо и $\dim M$ четна. Этого недостаточно: можно показать, например, что на S^4 структуры комплексного многообразия не существует.

Если два комплексных многообразия биголоморфно эквивалентны, то они и диффеоморфны. Обратное неверно даже в размерности 1:

Пример 3. Многообразия $\mathbb{C}$ и $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ диффеоморфны, но не являются биголоморфно эквивалентными: согласно теореме Лиувилля голоморфное отображение $f : \mathbb{C} \to D$ обязано быть константой и тем самым не может быть обратимым.

Пример 4. Многообразие D примера 3 (единичный круг) и многообразие $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ (верхняя полуплоскость) биголоморфно эквивалентны. Взаимно однозначные голоморфные отображения $f : D \to H$ и $g = f^{-1} : H \to D$ задаются равенствами $f(z) = i(1+z)/(1-z)$ и $g(z) = (z-i)/(z+i)$.

Теорема 1. *Группы комплексных автоморфизмов комплексных кривых (т.е. одномерных комплексных многообразий) D, H, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}P^1$ описываются так:*

(1) *Автоморфизмы D это дробно-линейные преобразования вида $f(z) = \psi(z-a)/(1-z\bar{a})$, где $|\psi| = 1$ и $|a| < 1$.*
(2) *Автоморфизмы H это дробно-линейные преобразования вида $f(z) = (az+b)/(cz+d)$ где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$.*
(3) *Автоморфизмы $\mathbb{C}$ это неоднородные линейные преобразования $f(z) = \lambda z + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$.*
(4) *Автоморфизмы $\mathbb{C}P^1$ это все дробно-линейные преобразования $f(z) = (pz+q)/(rz+s)$, $p, q, r, s \in \mathbb{C}$, $ps - qr \neq 0$.*

Доказательство. D. Обозначим $J : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ преобразование (инверсию), действующее по формуле $J(z) = 1/\bar{z}$. Пусть A_D — описанное в теореме множество дробно-линейных преобразований. Нетрудно проверить, что дробно-линейное преобразование f коммутирует с инверсией ($f \circ J = J \circ f$) тогда и только тогда, когда оно принадлежит A_D. Отсюда следует, что все A_D — группа.

Точки единичной окружности, и только они, остаются при инверсии неподвижными. Поэтому дробно-линейное преобразование $f \in A_D$ переводит единичную окружность в себя. Отсюда вытекает, что образ D при отображении f либо лежит в D, либо целиком лежит вне D. Но $f(0) = a \in D$, поэтому $f(D) \subset D$.

Для всякой точки $a \in D$ найдется дробно-линейное преобразование $G_a \in A_D$, для которого $G_a(a) = 0$. Пусть теперь f — произвольный автоморфизм D. Обозначим $a = f(0) \in D$. Преобразование $g = G_a \circ f$ — автоморфизм D, и $g(0) = 0$. По лемме Шварца $|g(z)| \le |z|$ для всех $z \in D$, откуда $|g^{-1}(z)| \ge |z|$. Но g^{-1} также является автоморфизмом D, откуда $|g^{-1}(z)| \le |z|$, то есть $|g(z)| = |z|$. Из леммы Шварца вытекает теперь, что $g(z) = \psi z$ при некотором ψ, $|\psi| = 1$. Тем самым $g \in A_D$, откуда $f = G_a^{-1} \circ g \in A_D$.

H. Как вытекает из примера 4, всякий автоморфизм g кривой H представляется в виде $p^{-1} \circ f \circ p$, где $p(z) = (z-i)/(z+i)$, а f — автоморфизм единичного круга. Тем самым g — дробно-линейное преобразование. Очевидно, g переводит вещественную ось в себя, откуда вытекает, что $g(z)$ можно представить в виде $(az+b)/(cz+d)$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Такое дробно-линейное преобразование переводит H либо в себя, либо в дополнительную полуплоскость, так что достаточно проверить включение $g(i) \in H$. Но $\operatorname{Im}(g(i)) = (ad - bc)/2(c^2 + d^2)$, откуда вытекает утверждение теоремы.

$\mathbb{C}$. Пусть f — автоморфизм $\mathbb{C}$. Множество $f(D)$ содержит по крайней мере одну внутреннюю точку b, которая тем самым не лежит в замыкании множества $f(\mathbb{C} \setminus D)$. Отсюда вытекает, что $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, не имеющая на бесконечности существенной особенности, то есть многочлен. Поскольку f взаимно однозначно, многочлен должен иметь степень 1.

$\mathbb{C}P^1$. Из примера 2 вытекает, что дробно-линейные преобразования являются голоморфными отображениями $\mathbb{C} \to \mathbb{C}P^1$; нетрудно проверить, что доопределяя $f(\infty) = [p : r]$, получим голоморфное отображение $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$. Непосредственные вычисления показывают, что дробно-линейные преобразования образуют группу.

Для всякой точки $a \in \mathbb{C}$ существует дробно-линейное преобразование G_a, для которого $G_a(a) = \infty$ — например, можно положить $G_a(z) = 1/(z-a)$ при $a \neq \infty$, и $G_\infty(z) = z$. Пусть теперь f — автоморфизм $\mathbb{C}P^1$ и $f(\infty) = a$. Преобразование $g = G_a \circ f$ — автоморфизм $\mathbb{C}P^1$, для которого $g(\infty) = \infty$, откуда $g|_{\mathbb{C}}$ — автоморфизм $\mathbb{C}$, то есть линейное преобразование. Поэтому преобразование $f = G_a^{-1} \circ g$ дробно-линейно. $\square$