Высший Колледж Математики

Римановы поверхности и алгебраические кривые
Лекция 9. Введение в теорию пересечения на пространствах модулей

1. Пространство модулей рациональных кривых с пятью отмеченными точками

В рассмотренных нами до сих пор примерах встречались только не более чем одномерные пространства модулей — рациональных кривых с тремя и четырьмя отмеченными точками и эллиптических кривых с одной отмеченной точкой. Посмотрим теперь, как строится пространство модулей стабильных рациональных кривых с пятью отмеченными точками.

Возьмем пространство $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$ модулей рациональных кривых с четырьмя отмеченными точками, представляющее собой проективную прямую, и построим универсальную кривую над ним. Зафиксируем на рациональной кривой $\mathbf{CP}^1$ координату и будем считать, что значения координат первых трех отмеченных точек равны соответственно $0, 1$ и ∞, тогда как координата λ четвертой точки произвольна и служит координатой в пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$. Начнем с рассмотрения прямого произведения $\mathbf{CP}^1 \times \overline{\mathcal{M}}_{0;4}$, вместе с его проекцией на второй сомножитель. У этого прямого произведения есть четыре структурных сечения $\sigma_1, \dots, \sigma_4 : \overline{\mathcal{M}}_{0,4} \to \mathbf{CP}^1 \times \overline{\mathcal{M}}_{0;4}$, отвечающие четырем отмеченным точкам. Над общей точкой базы никакие из этих четырех сечений не пересекаются. Над тремя граничными точками базы, отвечающими особым рациональным кривым, четвертое сечение пересекает трансверсально одно из трех оставшихся сечений. Раздуем в тотальном пространстве прямого произведения каждую из трех точек пересечения сечений. Получившееся гладкое двумерное многообразие и есть пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$, совпадающее с универсальной кривой $\overline{\mathcal{C}}_{0;4}$. Соответствующие четыре структурных сечения уже не пересекаются.

Тем самым мы реализовали пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ в виде квадрата проективной прямой, раздутого в трех точках. Такое представление позволяет, в частности, вычислить (ко)гомологии этого пространства. Пространства (ко)гомологий прямого произведения $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ вычисляются просто: есть по одной образующей в размерностях 0 и 4 и две образующие в размерности 2, отвечающие каждому из сомножителей, а в нечетных размерностях (ко)гомологии нулевые. При раздутии трех точек добавляются три новых образующих в размерности 2, и их становится всего пять.

Упражнение 1.1. Покажите, что пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ реализуется как результат раздутия четырех точек в общем положении на проективной плоскости.

На построенной нами поверхности $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ есть десять выделенных прямых. Это четыре сечения универсального расслоения $\overline{\mathcal{C}}_{0;4} \to \overline{\mathcal{M}}_{0;4}$ и три его особых слоя, каждый из которых представляет собой пару проективных прямых, пересекающихся в одной точке. Эти десять прямых образуют очень симметричную конфигурацию на поверхности $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$, которая и является границей этого пространства модулей, т.е. дополнением в нем к пространству модулей $\mathcal{M}_{0;5}$ гладких кривых. Каждая из десяти прямых является неприводимой компонентой границы и отвечает распадению рациональной кривой на две неприводимые компоненты. Такая неприводимая компонента границы определяется тем, как распределились отмеченные точки на двух компонентах кривой. Есть лишь один вид таких распадений: на одной компоненте должно оказаться две отмеченные точки, на другой — три. Всего существует десять возможных распадений, которые и нумеруют компоненты границы. Каждая из таких компонент действительно представляет собой проективную прямую: она совпадает с пространством модулей конфигураций четверок точек (тройки отмеченных точек и точки пересечения с другой компонентой) на второй компоненте распавшейся кривой. Это общая картина границы пространства модулей: неприводимые компоненты границы представляют собой произведения пространств модулей кривых меньших родов и/или с меньшим количеством отмеченных точек.

Десять компонент границы $\partial\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ пересекаются трансверсально. Всего имеется 15 точек пересечения. Каждая из этих 15 точек соответствует вырожденной кривой с тремя неприводимыми компонентами: к средней рациональной кривой, на которой есть одна отмеченная точка, прикреплено еще две рациональные кривые, на каждой из которых есть по две отмеченные точки. Эти 15 точек нумеруются распределениями пяти отмеченных точек по компонентам. Нетрудно видеть, что таких распределений действительно 15.

Упражнение 1.2. Изобразите комбинаторно построенную конфигурацию из 10 прямых, занумерованных распадениями множества отмеченных точек, указав точки их пересечения и соответствующие им распадения.

Упражнение 1.3. Покажите, что в представлении пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ в виде результата раздутия четырех точек в общем положении на проективной плоскости десяти граничным прямым соответствуют шесть прямых, соединяющих пары раздуваемых точек, плюс четыре вклеенные прямые.

В геометрии пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ отражаются общие свойства всех пространств модулей стабильных кривых:

- граница такого пространства модулей стратифицирована;
- коразмерность страта совпадает с числом двойных точек на соответствующих вырожденных кривых;
- каждый страт распадается на неприводимые компоненты, отвечающие комбинаторике вырождения и распределению отмеченных точек (т.е. модулярному графу);
- все нечетные (ко)гомологии нулевые; это происходит потому, что, подобно грассманианам, пространства модулей допускают клеточные разбиения, все клетки в которых имеют четную размерность.

2. Классы Мамфорда–Мориты–Миллера

Геометрию пространств стабильных кривых удобно описывать в терминах пересечений характеристических классов естественных расслоений на этих пространствах. Таких расслоений довольно много. В частности, с каждой отмеченной точкой можно связать линейное расслоение над $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Слоем линейного расслоения $\mathcal{L}_i$, отвечающего i-ой отмеченной точке, над точкой $(C; x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ является, по определению, кокасательная прямая к кривой C в точке x_i.

Замечание 2.1. Это определение можно сформулировать более строго. Над дополнением к множеству двойных точек слоев в универсальной кривой $\overline{\mathcal{C}}_{g;n}$ определено относительное кокасательное расслоение — линейное расслоение, слоями которого являются кокасательные прямые к слоям проекции $\overline{\mathcal{C}}_{g;n} \to \overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Расслоение $\mathcal{L}_i$ есть не что иное как обратный образ относительного кокасательного расслоения при отображении i-го сечения $\sigma_i : \overline{\mathcal{M}}_{g;,n} \to \overline{\mathcal{C}}_{g;n}$.

Упражнение 2.2. Изучая локальное вырождение слоя отображения $(x, y) \mapsto xy$, покажите, что относительное кокасательное расслоение допускает единственное продолжение до голоморфного линейного расслоения в двойные точки слоев. Это продолженное линейное расслоение называется *относительным дуализирующим пучком* над универсальной кривой.

Обозначим первый класс Черна расслоения $\mathcal{L}_i$ через ψ_i, $\psi_i = c_1(\mathcal{L}_i)$. Эти классы называются классами *Мамфорда–Мориты–Миллера.* Такой класс можно представить дивизором в пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ — линейной комбинацией неприводимых гиперповерхностей, определенной с точностью до рациональной эквивалентности. Пересечение таких дивизоров, взятых в количестве, равном размерности пространства модулей, представляет собой конечный набор точек. Количество точек в наборе, с учетом кратностей, называется *индексом пересечения* соответствующих классов. Если бы пространство модулей было многообразием, то индекс пересечения был бы целым числом. Именно так и происходит в пространствах модулей рациональных кривых. Однако для кривых старших родов необходимо учитывать структуру орбиобразия, в результате чего индекс может принимать рациональные значения.

3. Индексы пересечения

Посмотрим, как выглядят индексы пересечения ψ-классов в простейших случаях. Такой индекс обычно обозначается

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n}$$

(если представлять характеристический класс ψ_i 2-формой, то интеграл от внешнего произведения этих 2-форм совпадает с искомым индексом пересечения). Он может быть отличен от нуля только если степень монома совпадает с размерностью пространства интегрирования, т.е. $a_1 + \dots + a_n = 3g - 3 + n$.

Пространство $\overline{\mathcal{M}}_{0;3}$ нульмерно — это точка, поэтому по нему можно проинтегрировать только константу, и

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;3}} 1 = 1.$$

Интереснее подсчитать интеграл

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;4}} \psi_1$$

(в силу симметричности пространств и характеристических классов относительно перестановок индексов нам все равно, какой из четырех классов ψ_i интегрировать). Для вычисления этого интеграла построим ненулевое мероморфное сечение расслоения $\mathcal{L}_1$

над $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$. Построенное сечение на самом деле окажется голоморфным. Значением этого сечения над точкой $(\mathbf{CP}^1; x_1, x_2, x_3, x_4)$ должен быть кокасательный вектор к $\mathbf{CP}^1$ в точке x_1. Для построения сечения над пространством $\mathcal{M}_{0;4}$ неособых кривых рассмотрим на такой кривой мероморфную 1-форму, имеющую два полюса первого порядка — с вычетом 1 в точке x_2 и с вычетом -1 в точке x_3, и не имеющую других полюсов. Мероморфная 1-форма определяется этим условиями однозначно — она совпадает с 1-формой dz/z в координате z, в которой координата точки x_2 есть 0, а координата точки x_3 есть ∞. Ее-то значение в точке x_1 мы и возьмем в качестве значения строящегося сечения. Заметим, что построенная 1-форма имеет полюса только в точках x_2 и x_3 и не имеет нулей, поэтому построенное сечение не имеет полюсов и нулей над $\mathcal{M}_{0;4}$. Осталось посмотреть, как оно продолжается в точки границы $\partial\overline{\mathcal{M}}_{0;4} = \overline{\mathcal{M}}_{0;4} \setminus \mathcal{M}_{0;4}$.

Точки границы представляют собой особые рациональные кривые, состоящие из двух неприводимых компонент, пересекающихся по одной точке, и отличаются распределением отмеченных точек по компонентам. Рассмотрим особую кривую, у которой точки x_1 и x_2 лежат на одной компоненте, а точки x_3 и x_4 — на другой. Продолжение построенной формы на эту кривую должно иметь полюса первого порядка в точках x_2 и x_3. Это возможно только если оно приобретает полюса первого порядка в двойной точке, причем вычет полюса на первой компоненте равен -1, а на второй $+1$. Тем самым, продолженная форма по-прежнему не имеет нулей или полюсов в точке x_1. То же самое справедливо и для кривой с распадением отмеченных точек $\{\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}\}$. Для кривой же с распадением $\{\{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}\}$ ситуация иная. В этом случае оба полюса сосредоточены на одной компоненте, в двойной точке 1-форма не имеет полюса, а значит на второй компоненте у нее вообще нет полюсов. Но это означает, что продолженная 1-форма на второй компоненте тождественно равна нулю. В частности, равно нулю ее значение в точке x_1. Тем самым у построенного нами сечения есть единственный нуль, а полюсов нет.

Упражнение 3.1. Проанализируйте локальное поведение построенного сечения при вырождении семейства рациональных кривых $xy = t$ в точке $t = 0$ и выведите отсюда, что нуль у построенного сечения имеет порядок 1.

Это упражнение завершает вычисление индекса пересечения

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;4}} \psi_i = 1.$$

На поверхности $\overline{\mathcal{M}}_{0;5}$ могут быть отличны от нуля индексы пересечения $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;5}} \psi_i^2$ и $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;5}} \psi_i\psi_j$ при $i \neq j$. Ясно, что от выбора индексов результат вычисления не зависит. Для вычисления первого из этих интегралов построим представителя класса ψ_1, действуя аналогично предыдущему вычислению. Взяв сечение, отвечающее 1-форме с полюсами первого порядка в точках x_2 и x_3, мы заключаем, что класс ψ_1 представлен набором из трех граничных прямых, отвечающих следующим разбиениям множества индексов на два подмножества: $\{\{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3, x_5\}\}$, $\{\{x_1, x_5\}, \{x_2, x_3, x_4\}\}$, $\{\{x_2, x_3\}, \{x_1, x_4, x_5\}\}$ (т.е. в точности тем, в которых точки x_2 и x_3 лежат на одной неприводимой компоненте особой кривой).

Упражнение 3.2. Проверьте, что две из этих прямых пересекают третью, но не пересекаются между собой. Что представляют из себя точки пересечения?

Теперь мы должны пересечь построенный класс сам с собой. Для этого нужно немного возмутить каждую из трех граничных прямых и подсчитать соответствующие индексы пересечения. Проще, однако, *построить другого представителя того же класса*, трансверсально пересекающего первый, и получить нужный индекс пересечения, исходя из элементарных комбинаторных соображений. Мы можем взять сечение, отвечающее 1-форме с полюсами в точках x_4, x_5. Соответствующий ей представитель класса ψ_1 имеет вид $\{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4,x_5\}\}, \{\{x_1,x_3\},\{x_2,x_4,x_5\}\}, \{\{x_4,x_5\},\{x_1,x_2,x_3\}\}$. Первая и вторая из этих прямых имеют пустое пересечение с каждой из трех прямых, образующих первого представителя. Третья же прямая не пересекает первые две, но пересекает третью прямую, причем точкой пересечения служит трехкомпонентная особая кривая с распадением индексов $\{\{x_2,x_3\},\{x_1\},\{x_4,x_5\}\}$. Мы заключаем, что

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;5}} \psi_1^2 = 1.$$

Упражнение 3.3. Проверьте, что вычисление с возмущением одного представителя класса ψ_1 приводит к тому же ответу. [**Указание:** воспользуйтесь тем, что индекс самопересечения каждой из граничных прямых равен -1, доказав предварительно этот факт.]

Упражнение 3.4. Проверьте равенство

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;5}} \psi_1\psi_2 = 2.$$

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют найти явную формулу для всех индексов пересечения ψ-классов в роде нуль:

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0;n}} \psi_1^{a_1}\dots\psi_n^{a_n} = \binom{n-3}{a_1\dots a_n} = \frac{(n-3)!}{a_1!\dots a_n!}$$

для $a_1+\dots+a_n = n-3$. Явную формулу удается найти и для индексов пересечений в роде 1. Для старших родов такие явные формулы не известны, а все индексы пересечения описываются гипотезой Виттена (1990 г.), у которой к настоящему времени есть несколько доказательств. Эта гипотеза имеет вид рекуррентных соотношений на индексы пересечений, которые позволяют вычислять их последовательно.

Упражнение 3.5. Построив подходящее сечение орбирасслоения $\mathcal{L}_1$ над $\overline{\mathcal{M}}_{1;1}$, проверьте равенство

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1;1}} \psi_1 = \frac{1}{24}.$$

Упражнение 3.6. Над $\overline{\mathcal{M}}_{1;n}$ можно рассмотреть линейное расслоение, слоем которого является 1-мерное пространство голоморфных 1-форм над кривой. Обозначим через λ_1 первый класс Черна этого расслоения. Проверьте равенство

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1;1}} \lambda_1 = \frac{1}{24}.$$

Замечание 3.7. Несмотря на то, что индексы пересечения характеристических классов расслоений над пространствами модулей кривых старших родов оказываются рациональными, вовсе не любые рациональные числа могут встречаться. Так, для случая эллиптических кривых ($g = 1$) знаменатели всех этих рациональных чисел должны делить число 24, для кривых рода 2 — число 1152 и т.д. Этот «наибольший общий знаменатель» определяется геометрией соответствующего пространства модулей, точнее говоря, его «орбиобразностью».

4. О когомологиях пространств модулей рациональных кривых

В то время как сведения о геометрии пространств модулей кривых старших родов малочисленны и разрознены, у когомологий пространств $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ имеется эффективное описание. Классы, участвующие в этом описании, представлены граничными стратами. Посмотрим прежде всего на страты коразмерности один. Как мы уже выяснили, общая точка границы соответствует двухкомпонентной особой кривой, и неприводимая компонента границы выделяется распределением отмеченных точек по компонентам, т.е. неупорядоченным разбиением множества индексов $\{1, 2, \ldots, n\}$ на два подмножества, в каждом из которых не менее двух элементов. Пусть S — такое подмножество, $\overline{S} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus S$ — его дополнение. Обозначим замыкание соответствующего граничного страта через D_S, $D_S = D_{\overline{S}}$.

Упражнение 4.1. Подсчитайте количество граничных стратов коразмерности 1.

Приведенные выше рассуждения показывают, что пересечение двух стратов D_S и D_T может быть ненулевым только в случае, если S является подмножеством либо в T, либо в $\overline{T}$. Соотношения

$$D_S D_T = 0 \qquad \text{если } S \not\subset T, S \not\subset \overline{T} \tag{1}$$

для прочих пар S, T — нелинейные соотношения на классы, представленные граничными стратами.

Эти классы подчиняются и некоторым линейным соотношениям. Для их вывода рассмотрим *отображение забывания* $\overline{\mathcal{M}}_{0;n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{0;n}$. Это отображение сопоставляет кривой с $n+1$-ой отмеченными точками кривую с n отмеченными точками, забывая $n+1$-ую точку. Если исходная кривая гладкая, то такое забывание не нарушает ее стабильности. Однако для особой кривой ситуация более сложная: при забывании одной отмеченной точки кривая может перестать быть стабильной. Такое происходит либо если забываемая точка находится на неприводимой компоненте еще с одной отмеченной точкой и эта неприводимая компонента прикреплена к остальной части кривой в одной точке, либо если на неприводимой компоненте, содержащей забываемую точку, нет других отмеченных точек, а точек прикрепления к оставшейся части кривой две. В первом случае после забывания неприводимую компоненту нужно стянуть, пометив бывшую точку прикрепления второй расположенной на ней отмеченной точкой; во втором случае — просто стянуть, в результате чего две двойные точки заменятся одной. Другими словами, отображение забывания есть не что иное как отображение универсальной кривой. Ясно также, что забывать можно любую точку, не обязательно последнюю.

На пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$ все три граничные страта представляют один и тот же класс когомологий — класс точки на проективной прямой. Зафиксируем четыре индекса $\{i, j, k, l\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ и рассмотрим отображение забывания $\overline{\mathcal{M}}_{0;n} \to \overline{\mathcal{M}}_{0;4}$, последовательно забывающее все отмеченные точки кроме точек с номерами i, j, k, l. Прообразы каждой из трех граничных точек в $\overline{\mathcal{M}}_{0;4}$ при этом отображении дают три различных представления одного и того же класса когомологий. Представитель, соответствующий разбиению $\{\{x_i, x_j\}, \{x_k, x_l\}\}$, состоит из объединения тех граничных дивизоров D_S, в которых оба индекса i, j принадлежат множеству S, а индексы k, l — его дополнению $D_{\overline{S}}$. Обозначим это объединение через $ij|kl$. Тем самым, мы доказали, что

$$ij|kl = ik|jl = il|jk \tag{2}$$

для любой четверки индексов i, j, k, l. Теперь мы можем сформулировать теорему Киля.

Теорема 4.2 (Keel). *Кольцо когомологий пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ порождено классами D_S вещественной степени 2. Эти классы удовлетворяют линейным соотношениям (2) и нелинейным соотношениям (1), а все остальные соотношения между ними являются следствием этих.*

Из этой теоремы Концевич и Манин вывели следующее описание пространства когомологий $H^{2m}(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$. Это пространство порождено классами граничных стратов комплексной коразмерности m. Такой страт описывается модулярным деревом с $m+1$ вершинами, и между ними есть линейные соотношения. Такое линейное соотношение строится по модулярному дереву с m вершинами, вершине в этом дереве и набору из четырех индексов i, j, k, l. Модулярное дерево с m вершинами можно превратить в несколько модулярных деревьев с $m + 1$ вершинами, расщепив выделенную вершину на две, соединенные ребром. При этом ребра, входившие в разделяемую вершину, и индексы, приписанные разделяемой вершине, распределяются между двумя новыми всеми возможными способами. Некоторые из этих способов отделяют набор индексов i, j от набора индексов k, l. Это означает, что вершины с индексами i, j лежат ближе к одному концу вставленного ребра, а вершины с индексами k, l — к другому. Обозначим сумму соответствующих стратов через $ij|kl$ (это обозначение следовало бы снабдить для строгости индексом из модулярного графа и выделенной вершины в нем). Тогда соотношения Концевича–Манина выглядят в точности как соотношения (2), а их теорема гласит, что пространство когомологий $H^{2m}(\overline{\mathcal{M}}_{0;n})$ порождено граничными стратами соответствующей размерности, удовлетворяющими указанным соотношениям, и все остальные соотношения являются следствиями этих. Отметим, однако, что попытка практического применения этой теоремы для подсчета, например, чисел Бетти многообразий модулей, приводит к весьма трудоемким вычислениям, и при больших n эти числа лучше подсчитывать другими способами.

Упражнение 4.3. Воспользовавшись теоремами Киля и Концевича–Манина, подсчитайте числа Бетти (размерности пространств когомологий) пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0;n}$ для $n = 4, 5, 6$.