ЛЕКЦИЯ 7. СТАРШИЕ ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ. РАССЛОЕНИЯ.

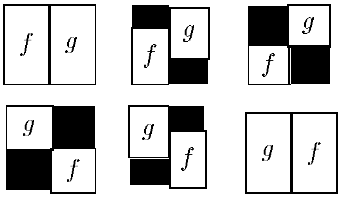
Пусть X — линейно связное топологическое пространство с отмеченной точкой p; $K_n = [0,1]^n$ обозначим n-мерный куб. Отображение $f : K_n \to X$ называется *n-мерным сфероидом*, если вся граница куба отображается в p. Сфероиды f_0 и f_1 называются гомотопными, если их можно соединить непрерывным семейством сфероидов f_t, $t \in [0,1]$ (продеформировать друг в друга). Отношение гомотопности сфероидов является отношением эквивалентности; множество классов эквивалентности обозначается $\pi_n(X,p)$.

При $n = 1$ сфероиды это петли, а $\pi_1(X,p)$ — фундаментальная группа. Оказывается, что при $n > 1$ на множестве сфероидов тоже можно ввести умножение. Именно, пусть $f, g : K_n \to X$ — сфероиды. Тогда, по определению, $(f \circ g)(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \dots, x_n), & 0 \le x_1 \le 1/2 \\ g(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n), & 1/2 \le x_1 \le 1 \end{cases}$.

Лемма 1. *Если $f_0 \sim f_1$, и $g_0 \sim g_1$, то $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.*

Доказательство леммы очевидно. Из леммы вытекает, что на множестве $\pi_n(X, x_0)$ корректно определено умножение.

Теорема 1. *Введенное умножение определяет на множестве $\pi_n(X, x_0)$ структуру группы. Эта группа не зависит от выбора точки p. При $n \ge 2$ группа коммутативна.*



Доказательство. Доказательство того, что $\pi_n(X,p)$ — группа и не зависит от n, одинаково при всех n; при $n = 1$ оно уже проводилось. Коммутативность $\pi_n(X,p)$ означает, что для произвольных n-сфероидов f и g сфероид $f * g$ гомотопен сфероиду $g * f$. Гомотопия при $n = 2$ показана на рисунке (зачерненные области отображаются в отмеченную точку p); при произвольном $n \ge 2$ конструкция аналогична. □

Группа π_1 может не быть коммутативной. Пример: букет окружностей (π_1 свободна).

Замечание. Пространство, получающееся из K_n отождествлением всех точек границы, гомеоморфно сфере S^n; точку, в которую стянулась граница, будем считать отмеченной. Поэтому n-сфероид можно определить и как непрерывное отображение $f : S^n \to X$, переводящее отмеченную точку сферы в p.

Пусть $F : X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, переводящее отмеченную точку в отмеченную: $f(p) = q$. Тогда каждому сфероиду $f : [0,1]^n \to X$ соответствует сфероид $F \circ f : [0,1]^n \to Y$.

Лемма 2. *Если $f_1 \sim f_2$, $F_1 \sim F_2$ (имеются в виду гомотопии в классе сфероидов и в классе отображений, переводящих отмеченную точку в отмеченную), то $F_1 \circ f_1 \sim F_2 \circ f_2$.*

Доказательство очевидно. Тем самым для всякого непрерывного отображения $F : X \to Y$ такого, что $F(p) = q$, определено отображение $F_* : \pi_n(X,p) \to \pi_n(Y,q)$, зависящее только от класса гомотопии отображения F.

Теорема 2. *Отображение $F_* : \pi_n(X,p) \to \pi_n(Y,q)$ является гомоморфизмом групп. Если $G : Y \to Z$ — непрерывное отображение, переводящее q в отмеченную точку r пространства Z, то имеет место равенство $(F \circ G)_* = F_* \circ G_*$.*

Следствие. *Гомотопические группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.*

Доказательство такое же, как для фундаментальной группы.

Теорема 3. *Пусть отображение $F : X \to Y$ — накрытие. Тогда для любого $n \ge 2$ отображение $F_* : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ — изоморфизм.*

Доказательство. Рассмотрим тождественное отображение $K_n \to K_n$ как гомотопию $\varrho : K_{n-1} \times [0,1] \to K_n$. Пусть $f : K_n \to Y$ — сфероид; отмеченные точки $y \in Y$ и $x \in X$ выберем так, чтобы $F(x) = y$. По теореме о накрывающей гомотопии существует гомотопия $g : K_{n-1} \times [0,1] \to X$ такая, что $F \circ g = f \circ \varrho$ и $g(a,t) = x$ при $a \in \partial K_{n-1}$ и произвольном t. Отсюда следует, что $g(a,1) = x$ при всех $a \in \partial K_{n-1}$ (заметим, что здесь используется условие $n \ge 2$), и, следовательно, отображение $h = g \circ \varrho^{-1} : K_n \to X$ является n-сфероидом. Очевидно, $F \circ h = f$, откуда следует, что отображение F_* — эпиморфизм.

Мономорфность доказывается так же, как для фундаментальной группы. □

Локально тривиальным расслоением называется набор данных (E, B, F, p), где E, B, F — топологические пространства, а $p : E \to B$ — непрерывное отображение со следуюим свойством: для всякой точки $a \in E$ существует ее открытая окрестность U и гомеоморфизм $\varphi_U : F \times U \to p^{-1}(U) \subset E$ такой, что $p \circ \varphi_U : F \times U \to U$ — проекция на второй сомножитель. E называется тотальным пространством, B — базой, F — стандартным слоем, p — отображением расслоения. Множество $p^{-1}(a) \subset E$ (гомеоморфное F), называется слоем над точкой a.

Пример 1. Накрытие это расслоение, стандартный слой которого F дискретен.

Морфизмы расслоений (с одной и той же базой) и эквивалентность расслоений определяются так же, как для накрытий.

Пример 2. Пусть $E = B \times F$, $p : E \to B$ — проекция на первый сомножитель. Расслоение, эквивалентное этому, называется тривиальным.

Пример 3. $B = S^1$, E — лента Мебиуса, $F = [0, 1]$, p — проекция ленты Мебиуса на ее среднюю линию. Это расслоение нетривиально, поскольку E (лента Мебиуса) не гомеоморфно $B \times F$ (цилиндру).

Пример 4. Расслоение Хопфа: $E = S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$, $B = S^2 = \mathbb{C}P^1$, проекция $p(z, w) = [z : w]$. Нетрудно видеть, что слой F гомеоморфен окружности: одновременное умножение z и w на число $\xi \in \mathbb{C}$, равное по модулю 1, не меняет точки $[z : w]$. Расслоение Хопфа нетривиально, поскольку сфера S^3 не гомеоморфна $S^2 \times S^1$.