Задачи по алгебре к 08 апреля 2003 г.

1. Разложите над полем $\mathbb{C}$ в сумму неприводимых регулярное представление группы a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; b) $\mathfrak{S}_3$.

2. Вычислите действие функторов $\otimes$ и $*$ на неприводимых представлениях группы a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; b) $\mathfrak{S}_3$.

3. Докажите, что a) $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$; b) $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$; c) $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3] \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

4. Докажите эквивалентность категорий $\mathrm{Rep}_G(K) \cong \prod_\rho \mathrm{Vect}_K$ (произведение по классам изоморфизма неприводимых представлений), если $\bar{K} = K$, $\mathrm{char}\, K = 0$, а G — конечная группа.

5. Пусть V — представление конечной группы G над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. a) Докажите, что на V существует G-инвариантное положительно определенное скалярное (эрмитово) произведение; b) Выведите из этого полную приводимость V.

6. Пусть группа G действует на множестве X, а $K[X]$ — пространство K-значных функций на X.
a) Постройте в $K[X]$ структуру G-модуля. b) Докажите, что $K[G]$ — регулярное представление;
c) $X \mapsto K[X]$ — контравариантный функтор $\mathcal{S}ets^G \to \mathrm{Rep}_G(K)$; d) $K[X \times Y] \cong K[X] \otimes K[Y]$.

7. Докажите, что a) $\otimes$ в категории $\mathrm{Rep}_G(K)$ коммутативно и ассоциативно; b) $\mathrm{Hom}(1_G, V) \cong V$, $1_G \otimes V \cong V$, $1_G^* \cong 1_G$; c) $\mathrm{Hom}(\varepsilon, \varepsilon) \cong 1_{\mathfrak{S}_n}$, $\varepsilon \otimes \varepsilon \cong 1_{\mathfrak{S}_n}$, $\varepsilon^* \cong \varepsilon$; d) $V \otimes K[G] \cong K[G]^{\oplus \dim V}$, $K[G]^* \cong K[G]$.

8. Докажите, что функториальные морфизмы $\mathrm{ev} : V^* \otimes V \to 1_G$, $\mathrm{ev}^* : 1_G \to V^* \otimes V$, $V \to V^{**}$, $U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}(U, V)$, $\mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)) \to \mathrm{Hom}(U \otimes V, W)$ — G-эквивариантны.

9. Определим коинварианты представления V как факторпредставление $V_G := V/\langle v - gv \rangle_{v \in V, g \in G}$.
Докажите, что a) $\mathrm{Hom}_G(U, V) \cong \mathrm{Hom}(U, V)^G$; b) $U \otimes_G V := U \otimes_{K[G]} V = (U \otimes V)_G$; c) $(V^*)^G \cong (V_G)^*$;
d) если U вполне приводимо, то канонический морфизм $V^G \to V_G$ — изоморфизм.

10. a) Пусть G — конечная подгруппа в группе $\mathrm{SO}(3;\mathbb{R})$. Докажите, что G совпадает с одной из следующих групп: (1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; (2) группа симметрий правильного n-угольника (группа диэдра); (3) группа вращений тетраэдра; (4) группа вращений куба (октаэдра); (5) группа вращений икосаэдра (додекаэдра). b) Опишите все конечные подгруппы в $SU(2)$; c) $\mathrm{SL}(3;\mathbb{R})$; d) $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$.