Лекция 5.
Теорема Хана-Банаха.

В прошлый раз мы обсудили функтор сопряжения, который сопоставляет каждому нормированному пространству X его сопряженное $X^* = \mathscr{B}(X, \mathbb{C})$, а каждому оператору $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ — его сопряженный $T^* \in \mathscr{B}(Y^*, X^*)$. Чтобы эти понятия были содержательными, хотелось бы, чтобы на каждом нормированном пространстве X имелось достаточное количество нетривиальных непрерывных функционалов. Однако пока неясно, почему таковые вообще существуют. Это, а также многое другое, следует из теоремы Хана-Банаха, к которой мы и переходим.

Теорема 1. *Пусть X — векторное пространство над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\|\cdot\|$ — преднорма на X, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство и $f_0\colon X_0 \to \mathbb{K}$ — линейный функционал, такой, что $|f_0(x)| \leqslant \|x\|$ для любого $x \in X_0$. Тогда существует линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{K}$, продолжающий f_0 и такой, что $|f(x)| \leqslant \|x\|$ для любого $x \in X$.*

Доказательство. Случай I: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

a) Предположим, что $X = X_0 \oplus \mathbb{R}x_0$ для некоторого $x_0 \notin X_0$. Тогда задать линейный функционал f на X, продолжающий f_0 — это все равно, что задать число $c = f(x_0)$. Пусть f — такой функционал. Тогда

$$|f(x)| \leqslant \|x\| \quad \forall\, x \in X \qquad \Longleftrightarrow \qquad |f(x_0 - x)| \leqslant \|x_0 - x\| \quad \forall\, x \in X_0$$

(ввиду линейности f). Последнее неравенство перепишем в виде

$$f_0(x) - \|x_0 - x\| \leqslant c \leqslant f_0(x) + \|x_0 - x\| \tag{1}$$

Таким образом, наша задача свелась к нахождению такого $c \in \mathbb{R}$, что неравенство (1) выполнено для любого $x \in X_0$. Ясно, что такое c существует тогда и только тогда, когда

$$f_0(x_1) - \|x_0 - x_1\| \leqslant f_0(x_2) + \|x_0 - x_2\| \quad \text{для любых} \quad x_1, x_2 \in X_0. \tag{2}$$

Но, по условию, $f_0(x) \leqslant \|x\|$ при $x \in X_0$, так что

$$f_0(x_1) - f_0(x_2) \leqslant \|x_1 - x_2\| \leqslant \|x_1 - x_0\| + \|x_0 - x_2\|,$$

что эквивалентно (2). Следовательно, константа $c \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая (1), действительно существует. Поэтому функционал $f\colon X \to \mathbb{R}$, заданный формулой $f(x + \lambda x_0) = f_0(x) + \lambda c$ для $x \in X_0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ — искомый.

b) Общий случай сводится к предыдущему при помощи леммы Цорна. А именно, рассмотрим множество, состоящее из пар (Z, g), где $Z \supset X_0$ — линейное подпространство в X, а $g\colon Z \to \mathbb{R}$ — линейный функционал, продолжающий f_0 и удовлетворяющий неравенству $|g(x)| \leqslant \|x\|$ для любого $x \in Z$. Введем отношение порядка на M, полагая

При составлении конспекта существенно использованы неопубликованные записки лекций А. Я. Хелемского «Лекции и упражнения по функциональному анализу» (с согласия автора).

$(Z_1, g_1) \prec (Z_2, g_2)$, если $Z_1 \subset Z_2$ и $g_2|_{Z_1} = g_1$. Очевидно, любое линейно упорядоченное подмножество $\{(Z_\alpha, g_\alpha)\} \subset M$ имеет верхнюю границу (Z, g), где $Z = \cup_\alpha Z_\alpha$, а функционал g однозначно определяется из условия $g|_{Z_\alpha} = g_\alpha$ для всех α. Поэтому в M есть максимальный элемент (Z, f). Применяя п. а), видим, что $Z = X$. Следовательно, f — искомое продолжение.

Случай II: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Положим $g_0 = \operatorname{Re} f_0$. Тогда g_0 — $\mathbb{R}$-линейный функционал на X_0, причем $|g_0(x)| \leqslant \|x\|$ для любого $x \in X_0$. По п. I, существует $\mathbb{R}$-линейный функционал $g\colon X \to \mathbb{R}$, продолжающий g_0 и такой, что $|g(x)| \leqslant \|x\|$ для любого $x \in X$. Зададим функционал $f\colon X \to \mathbb{C}$ формулой $f(x) = g(x) - ig(ix)$ и покажем, что это то, что мы ищем.

Очевидно, f $\mathbb{R}$-линеен, и $f(ix) = if(x)$ для любого x. Значит, f $\mathbb{C}$-линеен.

Если $x \in X_0$, то из $\mathbb{C}$-линейности f_0 следует, что $f(x) = g_0(x) - ig_0(ix) = \operatorname{Re} f_0(x) - i \operatorname{Re} f_0(ix) = \operatorname{Re} f_0(x) - i \operatorname{Re}(i f_0(x)) = \operatorname{Re} f_0(x) + i \operatorname{Im} f_0(x) = f_0(x)$. Поэтому f продолжает f_0.

Наконец, фиксируем произвольный $x \in X$ и покажем, что $|f(x)| \leqslant \|x\|$. Представим $f(x)$ в виде $f(x) = re^{i\varphi}$, где $r \geqslant 0$, и положим $y = e^{-i\varphi}x$. Тогда $r = f(y) \in \mathbb{R}$, поэтому $f(y) = g(y)$. Отсюда $|f(x)| = r = f(y) = g(y) \leqslant \|y\| = \|x\|$, как и требовалось. Теорема доказана. □

Замечание 1. Разумеется, суть теоремы Хана-Банаха в том, что при продолжении функционала удается сохранить оценку $|f(x)| \leqslant \|x\|$, которая выполнялась на X_0. Без этого теорема была бы тривиальной. Более того, вместо функционалов можно было бы тогда продолжать операторы со значениями в любом пространстве Y. Действительно, используя существование в произвольном векторном пространстве базиса Гамеля (алгебраического базиса), а также то, что базис подпространства можно дополнить до базиса объемлющего пространства, нетрудно показать, что *для любого векторного пространства X, подпространства $X_0 \subset X$ и линейного оператора $T_0\colon X_0 \to Y$ существует линейный оператор $T\colon X \to Y$, продолжающий T_0.* Последнее утверждение обычно записывают в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d, "T_0"'] & X \arrow[dl, dashed, "T"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

и говорят, что *любое векторное пространство Y инъективно.*

Следствие 1. *Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — линейное подпространство. Тогда для любого $f_0 \in X_0^*$ существует $f \in X^*$, продолжающий f и такой, что $\|f\| = \|f_0\|$.*

Доказательство. Домножим норму в пространстве X на $\|f_0\|$ и применим теорему Хана-Банаха. □

Упражнение 1. Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — замкнутое линейное подпространство и $x \notin X_0$. Докажите, что существует $f \in X^*$ такой, что $f|_{X_0} = 0$ и $f(x) \neq 0$.
Указание. Задайте f на $X_0 + \mathbb{K}x$, докажите его ограниченность и продолжите на X по теореме Хана-Банаха.

Определение 1. Нормированное пространство I называется *инъективным*, если для любого нормированного пространства X, подпространства $X_0 \subset X$ и линейного оператора $T_0 \in \mathscr{B}(X_0, I)$ существует линейный оператор $T \in \mathscr{B}(X, I)$, продолжающий T_0. Если при этом можно обеспечить, чтобы $\|T\| \leqslant C\|T_0\|$ для некоторой константы $C \geqslant 1$, зависящей только от I, то I называется *C-инъективным.*

Теорема Хана-Банаха означает в точности, что $\mathbb{K}$ 1-инъективно.

Упражнение 2. Докажите, что $\ell^\infty(S)$ 1-инъективно для любого множества S.

Ясно, что инъективность (соответственно, 1-инъективность) — инвариант изоморфизма в категории $\mathscr{N}orm$ (соответственно, в $\mathscr{N}orm_1$). Поэтому любое конечномерное пространство, будучи изоморфно в $\mathscr{N}orm$ пространству $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) = \ell^\infty(\{1, \ldots, n\})$, является инъективным.

Отметим без доказательства, что нормированное пространство над $\mathbb{R}$ 1-инъективно тогда и только тогда, когда в нем любое семейство попарно пересекающихся шаров имеет общую точку. Отсюда, в частности, видно, что евклидова плоскость $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ не является 1-инъективным пространством. (Может быть, Вам удастся придумать простое доказательство последнего утверждения?)

Неинъективные бесконечномерные нормированные пространства — отнюдь не редкость; таково, например, c_0. Мы еще вернемся к этому, когда будем говорить о проекторах и дополняемых подпространствах.

Естественно спросить: а единственно ли продолжение функционала с сохранением нормы, указанное в следствии 1? Ответ зависит от геометрических свойств пространства X.

Упражнение 3. Пусть $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ — плоскость и $X_0 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset X$ — «ось абсцисс». Зададим функционал $f_0 \colon X_0 \to \mathbb{R}$ формулой $f_0(x, 0) = x$. Ясно, что $\|f_0\| = 1$. Сколько существует функционалов на X, продолжающих f_0 и имеющих норму 1? (Рассмотрите всевозможные $p \in [1, +\infty]$.)

Предыдущее упражнение — это частный случай следующего общего факта:

Упражнение 4. Рассмотрим следующее свойство нормированного пространства X: *для каждого линейного подпространства $X_0 \subset X$ и каждого $f_0 \in X_0^*$ существует* единственный *$f \in X^*$ такой, что $\|f\| = \|f_0\|$.* Докажите, что X обладает этим свойством тогда и только тогда, когда сопряженное пространство X^* — строго нормированное (см. лекцию 2).

Продолжим извлекать следствия из теоремы Хана-Банаха.

Следствие 2. *Пусть X — нормированное пространство. Тогда для любого $0 \neq x \in X$ существует $f \in X^*$ такой, что $f(x) = \|x\|$ и $\|f\| = 1$.*

Доказательство. Зададим функционал $f_0 \colon \mathbb{K}x \to \mathbb{K}$ формулой $f_0(\lambda x) = \lambda\|x\|$ и продолжим его на X с сохранением нормы. ☐

Следствие 3. *Пусть X — нормированное пространство и $x_1, x_2 \in X$ — различные векторы. Тогда существует $f \in X^*$ такой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.* (Иными словами, непрерывные функционалы разделяют точки пространства X).

Следствие 4. *Для любого $x \in X$ справедливо равенство*

$$\|x\| = \max_{f \in X^*, \|f\| \leqslant 1} |f(x)|. \tag{3}$$

Следствие 5. *Пусть $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор между нормированными пространствами. Тогда $\|T^*\| = \|T\|$.*

Доказательство. Из определения T^* и равенства (3) получаем:

$$\|T^*\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|T^*(f)\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \sup_{\|x\| \leqslant 1} |T^*(f)(x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(Tx)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| = \|T\|.$$

□

Следствие 6. *Если $S, T \in \mathscr{B}(X, Y)$ и $S \neq T$, то и $S^* \neq T^*$.* (Иными словами, функтор сопряжения $\mathscr{N}orm \xrightarrow{*} \mathscr{N}orm$ — строгий.)

Теперь мы можем доказать, что $(\ell^\infty)^* \ncong \ell^1$:

Упражнение 5. Докажите, что нормированное пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда оно обладает плотным счетномерным подпространством.

Упражнение 6. Докажите, что пространства ℓ^p (при $p < \infty$), c_0, $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ (для любого p) сепарабельны, а ℓ^∞, $\mathscr{B}(\ell^p)$, $\mathscr{B}(c_0)$, $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)^*$ — нет.
Указание. Если в метрическом пространстве удалось найти континуум элементов, попарные расстояния между которыми больше, чем некоторое $\varepsilon > 0$, то такое пространство несепарабельно.

Упражнение 7. Докажите, что если X^* сепарабельно, то и X сепарабельно. (А верно ли обратное?)

Упражнение 8. Докажите, что $(\ell^\infty)^* \ncong \ell^1$.

Заметим, что $\ell^\infty \cong (c_0)^{**}$ (см. прошлую лекцию), и что c_0 является подпространством в ℓ^∞ (по определению), хотя и не совпадает с ним. На самом деле, любое нормированное пространство «естественно вкладывается» в свое второе сопряженное. Прежде чем говорить об этом, обсудим математический смысл слова «естественно».

Естественные преобразования (функторные морфизмы).

Пусть $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ — категории и $F, G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — ковариантные функторы.

Определение 2. *Естественное преобразование* (или *функторный морфизм*) $\alpha\colon F \to G$ — это семейство морфизмов $\alpha_X\colon F(X) \to G(X)$ в $\mathscr{D}$, заданных для каждого $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, такое, что для любого морфизма $\varphi\colon X \to Y$ в $\mathscr{C}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(Y) \\ {\scriptstyle \alpha_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y} \\ G(X) & \xrightarrow{G(\varphi)} & G(Y) \end{array}$$

коммутативна.

Если α_X — изоморфизм для любого $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, то α называется *естественной эквивалентностью* (или *функторным изоморфизмом*).

Замечание 2. Если на время забыть о теоретико-множественных предосторожностях, то можно ввести «категорию» $\mathscr{F}unct(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, объекты которой — ковариантные функторы из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$, а морфизмы — естественные преобразования. Тогда изоморфизмом в этой «категории» будет естественная эквивалентность. Заметим, однако, что естественные преобраования из одного функтора в другой образуют в общем случае не множество, а класс. Поэтому, формально говоря, $\mathscr{F}unct(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ не является категорией в смысле определения из лекции 1.

Пример 1. Для каждого нормированного пространства X отображение $\mathscr{B}(\mathbb{C}, X) \to X$, $T \mapsto T(1)$, очевидно, биективно. Легко видеть, что это — не просто биекция, а изоморфизм функторов $\mathscr{B}(\mathbb{C}, \,\cdot\,) \to \mathbf{1}_{\mathscr{N}orm}$, действующих из $\mathscr{N}orm$ в $\mathscr{N}orm$. Разумеется, тот же пример подходит и для категории $\mathscr{L}in$, и для $\mathscr{N}orm_1$, а после надлежащих модификаций (каких?) — для $\mathcal{S}et$ и для $\mathscr{A}b$.

Пример 2. Каждый морфизм $\varphi\colon X_1 \to X_2$ в категории $\mathscr{C}$ задает морфизм контравариантных функторов $\mathbf{h}_{X_1} \to \mathbf{h}_{X_2}$ (действующих, напомним, из $\mathscr{C}$ в $\mathcal{S}et$) по правилу

$$\mathbf{h}_{X_1}(Y) = \mathbf{h}(Y, X_1) \to \mathbf{h}_{X_2}(Y) = \mathbf{h}(Y, X_2), \quad \psi \mapsto \varphi \circ \psi.$$

Упражнение 9. Покажите, что любой морфизм функторов $\mathbf{h}_{X_1} \to \mathbf{h}_{X_2}$ имеет вид, указанный в примере 2, причем морфизм $\varphi\colon X_1 \to X_2$ определен однозначно. Иными словами, существует биекция

$$\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X_1, X_2) \cong \mathbf{h}_{\mathscr{F}unct(\mathscr{C}^\circ, \mathcal{S}et)}(\mathbf{h}_{X_1}, \mathbf{h}_{X_2}).$$

(Данное утверждение — это одна из форм *леммы Ионеды.*)
Указание. Если $\alpha\colon \mathbf{h}_{X_1} \to \mathbf{h}_{X_2}$ — морфизм функторов, то $\varphi = \alpha_{X_1}(\mathbf{1}_{X_1}) \in \mathbf{h}_{X_2}(X_1)$ — искомый морфизм в $\mathscr{C}$.

Пример 3. Пусть $\mathscr{C} = \mathscr{L}in$. Напомним, что каждое линейное пространство X вкладывается в свое (алгебраическое) второе сопряженное X^{**} при помощи отображения

$$i_X : X \to X^{**}, \quad i_X(x)(f) = f(x)$$

Нетрудно проверить (проверьте!), что семейство $\{i_X;\, X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{L}in)\}$ — это морфизм функторов $\mathbf{1}_{\mathscr{L}in} \to {}^{**}$, действующих из $\mathscr{L}in$ в $\mathscr{L}in$. Этот морфизм не является изоморфизмом функторов (почему? приведите пример пространства X, для которого i_X не сюръективно). Однако, если ограничить наши функторы на полную подкатегорию $\mathscr{F}\mathscr{L}in$, состоящую из конечномерных пространств, то мы получаем естественную эквивалентность между тождественным функтором и функтором «двойного сопряжения». В этом и состоит смысл фразы *“конечномерное линейное пространство естественно изоморфно своему второму сопряженному”*.

Замечание 3. Обратите внимание, что отображение i_X можно отождествить с отображением, сопоставляющим оператору $T\colon \mathbb{C} \to X$ его сопряженный $T^*\colon X^* \to \mathbb{C}$ (ср. пример 1). Это наблюдение можно использовать при решения упражнения 1 из прошлой лекции (и упражнения 13, см. ниже).

Каноническое вложение во второе сопряженное. Рефлексивные пространства.

Конструкцию из примера 3 можно применить к какой-либо из категорий $\mathscr{N}orm$ или $\mathscr{N}orm_1$. Конечно, на этот раз под сопряженным пространством X^* следует понимать пространство *непрерывных* (а не всех, как в примере 3) линейных функционалов на X.

Предложение 1. *Формула* $i_X\colon X \to X^{**}$, $i_X(x)(f) = f(x)$ *задает изометрическое вложение нормированного пространства* X *в* X^{**}.

Доказательство. Достаточно применить следствие 4. □

Таким образом, как и в примере 3, получаем естественное преобразование функторов $\mathbf{1}_{\mathscr{N}orm_1} \to {}^{**}$.

Упражнение 10. Докажите, что любое нормированное пространство X изометрически вкладывается в $\ell^\infty(S)$ для некоторого множества S.
Указание. В качестве S можно взять единичный шар в X^*.

Поскольку $\ell^\infty(S)$ — инъективное пространство (см. упражнение 2), из последнего упражнения следует, что каждое нормированное пространство вкладывается в инъективное. Этот важный факт иногда обозначают фразой *“в категории $\mathscr{N}orm$ имеется достаточно много инъективных объектов”*.

Упражнение 11. Докажите, что если нормированное пространство X инъективно, то оно C-инъективно для некоторой константы $C \geqslant 1$.

Определение 3. Нормированное пространство X называется *рефлексивным*, если i_X сюръективно (или, что в данном случае то же самое, является изометрическим изоморфизмом).

Пример 4. Очевидно, любое конечномерное пространство рефлексивно.

Пример 5. Пространства ℓ^p при $1 < p < \infty$ рефлексивны. Чтобы в этом убедиться, обозначим через $\alpha_{qp}\colon \ell^q \to (\ell^p)^*$ канонический изометрический изоморфизм, построенный на прошлой лекции (здесь, как обычно, $1/p + 1/q = 1$). Ясно, что тогда $\alpha_{qp}^*\colon (\ell^p)^{**} \to (\ell^q)^*$ и $(\alpha_{qp}^*)^{-1} \circ \alpha_{pq}\colon \ell^p \to (\ell^p)^{**}$ — изометрические изоморфизмы, и, как легко проверить (все же проверьте), что последний из них — это в точности каноническое вложение $i_{\ell^p}\colon \ell^p \to (\ell^p)^{**}$.

Замечание 4. Отметим, что существуют нерефлексивные нормированные пространства, изоморфные (в $\mathscr{N}orm_1$) своим вторым сопряженным. Поэтому рассуждение вида “$(\ell^p)^* \cong \ell^q$, $(\ell^q)^* \cong \ell^p$, следовательно, $(\ell^p)^{**} \cong \ell^p$” еще не доказывает, что ℓ^p рефлексивно. **!**

Упражнение 12. Докажите, что c_0, ℓ^1 и $C[a,b]$ нерефлексивны.
Указание. Что касается ℓ^1 и $C[a,b]$, то можно, например, воспользоваться результатом упражнения 7.

Упражнение 13. Является ли функтор сопряжения $\mathscr{N}orm \xrightarrow{*} \mathscr{N}orm$ полным?

Упражнение 14. Пусть X_0 — подпространство нормированного пространства X. Докажите, что X_0 всюду плотно в $X \iff$ любой $f \in X^*$, обращающийся в нуль на X_0, равен нулю.

Последнее упражнение позволяет легко доказать, что ℓ^1 нерефлексивно: положите $X = \ell^\infty$, возьмите в качестве X_0 линейную оболочку всех e_n-ых, и догадайтесь, что делать дальше.

Пространства из упражнения 12 — это «содержательные» примеры нерефлексивных пространств. Можно, однако, построить целый класс «неинтересных» примеров (почему «неинтересных» — выяснится на следующей лекции). Для этого сделайте еще два (интересных) упражнения:

Упражнение 15. Пусть X_0 — всюду плотное подпространство нормированного пространства X. Обозначим вложение X_0 в X через j. Докажите, что j^* — изоморфизм в $\mathscr{N}orm_1$.

Упражнение 16. Докажите, что собственное всюду плотное подпространство нормированного пространства не может быть рефлексивным.

Где об этом почитать. Теорема Хана-Банаха — это один из «трех китов» функционального анализа, поэтому она есть в любом учебнике. О многочисленные следствиях и приложениях этой теоремы можно прочесть в книге Эдвардса «Функциональный анализ». О продолжении линейных операторов (и об инъективности любого объекта из $\mathscr{L}in$) написано в книге Кострикина и Манина «Линейная алгебра и геометрия». Кое-что об инъективных нормированных пространствах есть в лекциях N. Carothers'a (см. ссылку в лекции 2) и — более подробно — в обзорной статье M. Zippin'a "Extension of bounded linear operators" (`http://www.ma.huji.ac.il/~zippin/`). О единственности продолжения функционала с сохранением нормы написано у Федорова (см. ссылку в лекции 2). По поводу естественных преобразований см. книги Манина «Лекции по алгебраической геометрии, часть I», добавление, Гельфанда и Манина «Методы гомологической алгебры», Букура и Деляну «Введение в теорию категорий и функторов»; там же доказана лемма Ионеды. Подробности о рефлексивных пространствах и их свойствах см. в первом томе Данфорда и Шварца («Линейные операторы»).