Дифференциальная геометрия, II курс IV семестр
Письменный Экзамен, 19 мая 2002 г.

1. Докажите равенство $R_{ijkl} = R_{klij}$ для тензора кривизны римановой метрики (считая другие симметрии доказанными).

2. Докажите, что длина окружности и площадь круга малого радиуса ε на римановой поверхности имеют вид

$$l(\varepsilon) = 2\pi\varepsilon + A\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3), \qquad s(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2 + B\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4).$$

Выразите константы A и B через гауссову кривизну.

3. Пусть S — коническая поверхность, образованная прямыми, проходящими через начало координат и через точки заданной кривой $r \subset \mathbb{R}^3$.
а) Докажите, что гауссова кривизна поверхности S в точках ее гладкости равна нулю.
б) Найдите на S евклидовы координаты для случая, когда кривая r лежит на единичной сфере и имеет натуральную параметризацию.

4. Сечения тривиального расслоения со слоем $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ над проколотой плоскостью $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ могут рассматриваться как комплекснозначные функции. Рассмотрим связность в этом расслоении, задаваемую равенством

$$\nabla_\xi u = \xi u + a\frac{\xi_1 + i\xi_2}{x_1 + ix_2}u,$$

где $\xi = \xi_1\partial_{x_1} + \xi_2\partial_{x_2}$, $a \in \mathbb{C}$ — константа. Найдите задаваемое этой связностью преобразование слоя при параллельном переносе вдоль окружности радиуса 2 с центром в точке $(1, 0)$.

5. (Псевдо)риманова метрика и связность в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами $x = u_1$, $y = u_2$, $z = u_3$ задается на базисных векторных полях равенствами

$$(\partial_{u_i}, \partial_{u_j}) = \frac{\partial^3 F}{\partial u_1 \partial u_i \partial u_j}, \qquad (\nabla_{\partial_{u_i}}\partial_{u_j}, \partial_{u_k}) = \frac{\partial^3 F}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k},$$

где $F(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 z + x\,y^2) + a\,y^2 z^2 + b\,z^5$ При каких соотношениях на константы a, b эта связность плоская? Является ли она симметричной? Согласованной с метрикой?

Комментарии к решению некоторых задач

2. Чтобы *вычислить* коэффициенты $A = -\frac{\pi K}{3}$, $B = -\frac{\pi K}{12}$, достаточно рассмотреть любой нетривиальный пример, скажем, сферу радиуса $R = K^{-1/2}$. Тогда окружность радиуса ε имеет длину

$$l(\varepsilon) = 2\pi R \sin(\varepsilon/R) \approx 2\pi\varepsilon - 2\pi \frac{1}{6}\frac{\varepsilon^3}{R^2} = 2\pi\varepsilon - \frac{\pi K}{3}\varepsilon^3$$

Соответственно, площадь находится интегрированием

$$s(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon l(\tau)\, d\tau \approx \int_0^\varepsilon (2\pi\tau - \frac{\pi K}{3}\tau^3)\, d\tau = \pi\varepsilon^2 - \frac{\pi K}{12}\varepsilon^4.$$

Для *доказательства* полученных ответов проще всего рассмотреть *нормальные* координаты, в которых геодезические, выходящие из начала координат, изображаются прямолинейными лучами и окружность радиуса ε изображается стандартной окружностью радиуса ε.

3. Поверхность задается параметрически $(r, s) \mapsto s\, r(t)$. Если r — кривая на сфере, а t — натуральный параметр, то индуцированная метрика имеет вид $g = ds^2 + s^2\, dt^2$. Это — полярные координаты на плоскости, а евклидовы имеют вид $x = s\cos t$, $y = s \sin t$ соответственно.

4. Дифференциальное уравнение, задающее параллельный перенос, записывается в виде
$$\frac{du(t)}{dt} + a\frac{\dot{x}}{x}\, u = 0, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$
где $x(t) = 1 + 2e^{it}$ — заданная кривая. Можно, конечно, подставить явное выражение для $x(t)$ и решить полученное уравнение, но проще действовать в общем виде: переписав уравнение в форме
$$d\ln u = -a\, d\ln x$$
мы находим его решение
$$u(t) = e^{-a\, \ln x(t)} u(0).$$
Из этой формулы вытекает, что искомое преобразование зависит только от гомотопического класса пути (т.е. связность плоская) и задается умножением на число $e^{-2\pi i a\, k}$, где k — число оборотов кривой $x(t)$ вокруг начала координат (в нашем случае $k = 1$).

5. Действуя прямолинейно, нужно вычислить $3^3 = 27$ символов Кристоффеля, по ним определить $3^4 = 81$ коэффициентов тензора кривизны и приравнять их нулю. Это непросто сделать в ограниченное время, не

ошибившись, и не запутавшись в индексах. Гораздо эффективнее записывать вычисления в матричной форме. Из явного вида метрики (которую правильно вычислили почти все) $g = dx\,dz + dy^2$ вытекает, что матрица связности $\theta^i_j = \Gamma^i_{jk} du_k$ имеет вид

$$\theta = \begin{pmatrix} dF_{31} & dF_{32} & dF_{33} \\ dF_{21} & dF_{22} & dF_{23} \\ dF_{11} & dF_{12} & dF_{13} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad F_{i,j} = \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}.$$

Матрицу кривизны находим из уравнения Картана $R = d\theta + \theta \wedge \theta$,

$$R = \begin{pmatrix} A & C & 0 \\ B & 0 & -C \\ 0 & -B & -A \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} A = dF_{31} \wedge dF_{31} + dF_{32} \wedge dF_{21} + dF_{33} \wedge dF_{11} \\ B = dF_{21} \wedge dF_{31} + dF_{22} \wedge dF_{21} + dF_{23} \wedge dF_{11} \\ C = dF_{31} \wedge dF_{32} + dF_{32} \wedge dF_{22} + dF_{33} \wedge dF_{12} \end{cases}$$

Подставив заданную функцию F (только сейчас!) мы получаем

$$\begin{aligned} A &= d(4ayx) \wedge dy + d(2ay^2 + 20by^3) \wedge dz = 0, \\ B &= dy \wedge dx + d(x + 2az^2) \wedge dy + d(4ayz) \wedge dz = 0, \\ C &= dx \wedge (4ayz) + d(4ayz) \wedge d(x + 2az^2) + d(2ay^2 + 20bz^3) \wedge dy \\ &= 16a^2 z^2\, dy \wedge dz + 60bz^2\, dz \wedge dy = 4(4a^2 - 15b) z^2\, dy \wedge dz \end{aligned}$$

Искомое соотношение $4a^2 = 15b$. Отметим, что связность не согласована с метрикой, но симметрична — это вытекает из равенства смешанных частных производных $F_{ij} = F_{ji}$.

Differential Geometry
Examination, 19.05.2002

1. Prove the equality $R_{ijkl} = R_{klij}$ for the Riemann curvature tensor (assuming the other symmetries established).

2. Prove that the perimeter and the area of the circle of small radius ε on a Riemannian surface have the form

$$l(\varepsilon) = 2\pi\varepsilon + A\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3), \qquad s(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2 + B\varepsilon^4 + o(\varepsilon^4),$$

where A and B are some constants. Express these constants in terms of the Gauss curvature.

3. Let S be the conical surface formed by the direct lines passing through the origin and through the points of the given curve $r \subset \mathbb{R}^3$.
a) Prove that the Gauss curvature of S vanishes identically.
b) Find the Euclidean coordinates in the case when r belongs to the unit sphere with the center at the origin and is provided with the natural parameterization.

4. The sections of the trivial vector bundle with the fiber $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ over the punctured plane $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ can be considered as the complex-valued functions. Consider the connection in this bundle given by the formula

$$\nabla_\xi u = \xi u + a\frac{\xi_1 + i\xi_2}{x_1 + ix_2}u,$$

where $\xi = \xi_1\partial_{x_1} + \xi_2\partial_{x_2}$ and $a \in \mathbb{C}$ is a constant. Find the parallel transform along the circle of radius 2 centered at $(0, 1)$.

5. The (pseudo)riemannian metric and the connection in $\mathbb{R}^3$ with coordinates $x = u_1$, $y = u_2$, $z = u_3$ are given on the basis vector fields by

$$(\partial_{u_i}, \partial_{u_j}) = \frac{\partial^3 F}{\partial u_1 \partial u_i \partial u_j}, \qquad (\nabla_{\partial_{u_i}}\partial_{u_j}, \partial_{u_k}) = \frac{\partial^3 F}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k},$$

where $F(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 z + x\, y^2) + a\, y^2 z^2 + b\, z^5$.
Under what relations between the constants a, b the connection is flat? Is this connection symmetric? Is it compatible with the metric?