ЛЕКЦИЯ 6

Пусть $M \subset \mathbb{R}^N$ — гладкое многообразие размерности m. Символом $C^\infty(M)$ обозначим алгебру гладких функций на M. Семейство $\mathfrak{U}$ подмножеств многообразия M называют покрытием, если $\bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U = M$. Покрытие называют открытым, если все множества $U \in \mathfrak{U}$ открыты; локально конечным, если у каждой точки $a \in M$ имеется окрестность, пересекающаяся только с конечным числом множеств $U \in \mathfrak{U}$.

Лемма 1. *Для каждого открытого покрытия $\mathfrak{U}$ многообразия M существует локально конечное открытое покрытие $\mathfrak{V}$ такое, что $\forall V \in \mathfrak{V} \exists U \in \mathfrak{U} : V \subset U$.*

Доказывать лемму 1 мы не будем; свойство многообразий, упомянутое в ней, называется паракомпактностью.

Следствие 1. *У всякого многообразия существует локально конечное покрытие координатными окрестностями.*

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{U}$ — локально конечное открытое покрытие многообразия M. Тогда существуют такие функции $\varrho_U \in C^\infty(M)$, где $U \in \mathfrak{U}$, что*

1. $\operatorname{supp} rho_U \subset U$, *где* $\operatorname{supp} f \overset{def}{=} \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}$.
2. $\sum_U \varrho_U(x) \equiv 1$.

(Сумма в пункте 2 конечна для каждого $x \in M$.)

Семейство функций ϱ_U называется разбиением единицы, подчиненным покрытию $\mathfrak{U}$. Доказательство теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы для $\mathbb{R}^m$ — см. лекции предыдущего семестра.

Следствие 2. *Пусть f — гладкая функция, определенная в окрестности U точки a на многообразии M. Тогда существует функция $F \in C^\infty(M)$ (т.е. гладкая и определенная на всем M), совпадающая с f в некоторой окрестности $V \subset U$ точки a.*

Доказательство. Пусть $Q \subset U$ — замкнутое множество, содержащее точку a. Множества $U, M \setminus Q$ образуют покрытие M; пусть $\varrho_U, \varrho_{M\setminus Q}$ — соответствующее разбиение единицы. Положим $F = \varrho_U f$ (и по определению $F(x) = 0$ при $x \notin U$); V — произвольная окрестность a, лежащая в Q. □

Теорема 2. *Пусть многообразие M компактно, а $I \subset C^\infty(M)$ — идеал. Пусть $\{f_\alpha\} \subset I$ — семейство гладких функций, не имеющих общих нулей. Тогда идеал I тривиален. В случае, когда многообразие M некомпактно, соответствующий результат верен, если идеал I замкнут.*

Доказательство. Для каждой точки $a \in M$ существует функция $f_a \in \{f_\alpha\}$ такая, что $f_a(a) \neq 0$. Множество $U_a = \{x \in M \mid f_a(x) \neq 0\}$ открыто и содержит точку a, поэтому $\{U_a \mid a \in M\}$ — открытое покрытие многообразия M. Поскольку M — компакт, из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{a_i}, i = 1, \ldots, N\}$. Функция $f(x) = \sum_{i=1}^N f_{a_i}^2(x)$ принадлежит идеалу I и не обращается в нуль нигде на X. Следовательно, функция $1 = f(x)/f(x)$ также принадлежит идеалу I, и $I = C^\infty(M)$.

В случае некомпактного M обозначим $U_\alpha = \{x \in M \mid f_\alpha(x) > 0\}$ и $V_\alpha = \{x \in M \mid f_\alpha(x) < 0\}$. Множества U_α, V_α образуют открытое покрытие M. Выберем соответствующее локально конечное покрытие W_β, как в лемме 1: $\forall\beta\exists\alpha(\beta)$: $W_\beta \subset U_{\alpha(\beta)}$ или $W_\beta \subset V_{\alpha(\beta)}$. Пусть ϱ_β — соответствующее разбиение единицы. Если $W_\beta \subset V_{\alpha(\beta)}$, то сменим у функции ϱ_beta знак на противоположный. Тогда $f(x) = \sum_\beta \varrho_\beta(x) f_{\alpha(\beta)}(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Поскольку I — замкнутый идеал, порожденный f_α, $f \in I$. Но тогда $1 = f(x)/f(x) \in I$, и идеал I тривиален. □

Пусть $a \in M$. Обозначим $I_a = \{f \in C^\infty(M) \mid f(a) = 0\}$.

Следствие 3. *Множество I_a замкнуто и является максимальным идеалом в алгебре $C^\infty(M)$. Любой замкнутый максимальный идеал в алгебре $C^\infty(M)$ имеет вид I_a для какой-либо точки $a \in M$. Если многообразие M компактно, то требование замкнутости можно опустить.*

Доказательство. Очевидно, множество I_a является идеалом. Пусть $J \supset I_a$ — бо́льший идеал, $\exists f \in J : f \notin I_a$, т.е. $f(a) \neq 0$. Функция $\mu(x) = 1 - f(x)/f(a)$ обращается в нуль в точке a — следовательно, $\mu \in I_a$. Но тогда $1 = \mu(x) + f(x)/f(a)$, откуда следует, что идеал J содержит 1 и, следовательно, тривиален.

Пусть теперь $I \subset C^\infty(M)$ — максимальный идеал (замкнутый в случае некомпактности M). Согласно теореме 2 существует точка $a \in M$ такая, что $f(a) = 0$ при всех $f \in I$, т.е. $I \subset I_a$. Поскольку идеал I максимален, $I = I_a$. □

Теорема 3. *Квадрат I_a^2 идеала I_a состоит из всех функций $f \in C^\infty(M)$ таких, что $f(a) = 0$ и $f'(a) = 0$.*

Доказательство. Пусть $f \in I_a^2$, т.е. существуют функции $a_i, b_i \in I_a$ такие, что $f = \sum_{i=1}^N a_i b_i$. Тогда $f(a) = \sum_{i=1}^N a_i(a) b_i(a) = 0$ и $f'(a) = \sum_{i=1}^N (a_i'(a) b_i(a) + a_i(a) b_i'(a)) = 0$.

Обратно, пусть $f(a) = 0$ и $f'(a) = 0$. Тогда по лемме Адамара в каждой системе координат U функция $f_U = f \circ s_U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ может быть представлена в виде $f_U(x) = (A(x)x, x) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) x_i x_j$. Функции $a_i = (\sum_{j=1}^m a_{ij}(x) x_j) \circ s_U^{-1}$ и $b_i = x_i \circ s_U^{-1}$ определены в окрестности U точки a и равны нулю в этой точке. В окрестности U имеем $f = \sum_{i=1}^m a_i b_i$; нетрудно видеть, что функции a_i и b_i можно продолжить на все многообразие с сохранением этого свойства. Следовательно, $f \in I_a^2$. □

Следствие 4. *Линейное пространство $T_a^* M$ изоморфно фактору I_a/I_a^2.*

Доказательство. Отображение $A : I_a \to T_a^* M$ сопоставляет функции f функционал $f'(a) \in T_a^* M$. Согласно теореме 3 оно "пропускается" через I_a^2: существует такое отображение $\widetilde{A} : I_a/I_a^2 \to T_a^* M$, что $A = \widetilde{A} \circ \pi$, где π — стандартная проекция $I_a \to I_a/I_a^2$.

Отображение $\widetilde{A}$ обратимо: пусть $\nu \in T_a^*$, и пусть s_U — параметризация многообразия M в окрестности точки a; $s_U(0) = a$. Рассмотрим функцию $f(b) = \nu(s_U'(0) s_U^{-1}(b))$, где $b \in U$, и продолжим ее с окрестности U на все многообразие M по следствию 2. Нетрудно проверить, что $f'(a) = \nu$. □

Пусть $v \in T_aM$, $f \in C^\infty(M)$. Обозначим $L_v f(a) \overset{\text{def}}{=} f'(a)v \in \mathbb{R}$; L_v называется производной Ли функции f вдоль вектора v.

Пусть $F : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение. Отображение $F^* : C^\infty(M_2) \to C^\infty(M_1)$ сопоставляет функции $f : M_2 \to \mathbb{R}$ функцию $F^* f \overset{\text{def}}{=} f \circ F : M_1 \to \mathbb{R}$. Из формулы производной композиции отображений следует, что $L_{F'(a)v} f = L_v F^* f$. Пусть, в частности, $M_1 = M$, $M_2 = \mathbb{R}^N$, а F — вложение. Если $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, то $F^* f \in C^\infty(M)$ — ограничение этой функции на M. Тогда $L_v F^* f = \sum_{i=1}^N v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, где $v = (v_1, \dots, v_N) \in T_aM \subset \mathbb{R}^N$.

Пусть $\gamma : [0,1] \to M$ — гладкое отображение (гладкая кривая) такое, что $\gamma(0) = a$ и $\gamma'(0) = v \in T_aM$. Тогда, очевидно, $L_v(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\big|_{t=0}$. Нетрудно видеть, что всякий вектор $v \in T_aM$ представим в виде $\gamma'(0)$ для некоторой кривой γ, и что условие $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ эквивалентно тому, что $|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| = o(t)$ при $t \to 0$.

Теорема 4. *Пусть $v \in T_aM$. Отображение $L_v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ линейно и обладает свойством $L_v(fg) = f(a)L_v(g) + g(a)L_v(f)$. Любой линейный функционал на $C^\infty(M)$, обладаюший этим свойством, имеет вид L_v для некоторого $v \in T_aM$.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только последнее утверждение. Пусть $\varphi : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ — линейный функционал с указанным свойством. Тогда $\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = 1 \cdot \varphi(1) + 1 \cdot \varphi(1) = 2\varphi(1)$, откуда $\varphi(1) = 0$ и, в силу линейности, $\varphi(c) = 0$ для любой константы c, и $\varphi(f) = \varphi(f - f(a))$. Поэтому, вычисляя значение $\varphi(f)$, мы можем предположить, что $f(a) = 0$. Пусть $f'(a) = 0$; тогда по теореме 3 $f \in I_a^2$, т.е. $f = \sum_{i=1}^N a_i b_i$, где $a_i, b_i \in I_a$. Тогда $\varphi(f) = \sum_{i=1}^N \varphi(a_i) b_i(a) + a_i(a)\varphi(b_i) = 0$. Из этого следует, что $\varphi = \mu \circ D_a$, где $D_a : C^\infty(M) \to T_a^* M$ — отображение, действующее по правилу $D_a(f) \overset{\text{def}}{=} f'(a)$, а $\mu \in (T_a^* M)^* = T_aM$. $\square$