ЛЕКЦИЯ 1

Abstract. Линейные нормированные пространства и производные.

Линейным нормированным пространством называется линейное пространство V, на котором определена *норма* — функция $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ такая, что

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ для всех $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ для всех $u, v \in V$.

Линейное нормированное пространство автоматически наделяется метрикой (и, следовательно, топологией): достаточно положить $\varrho(a, b) = \|b - a\|$ (проверьте !).

Примеры линейных нормированных пространств:

Пример 1. В пространстве $\mathbb{R}^n$ можно определить норму ℓ_1: $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n |x_i|$; норму ℓ_2: $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$; норму ℓ_∞: $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1}^n |x_i|$. Проверка определения нормы тривиальна, за исключением свойства 3 для нормы ℓ_2. Для доказательства этого свойства зафиксируем $u, v \in \mathbb{R}^n$ и пусть $(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n u_i v_i$ (так что $\|u\|_2^2 = (u, u)$).

Лемма. $|(u, v)| \leq \|u\|_2 \cdot \|v\|_2$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $p(t) = \|u - tv\|_2^2 = \|u\|_2^2 - 2t(u, v) + t^2 \|v\|_2^2$. Этот квадратный трехчлен неотрицателен при всех t, и поэтому его дискриминант неположителен: $(u, v)^2 - \|u\|_2^2 \cdot \|v\|_2^2 \leq 0$. □

Из леммы немедленно вытекает требуемое неравенство: легко проверить, что $\|u + v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + 2(u, v) \leq \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + 2\|u\|_2 \cdot \|v\|_2 = (\|u\|_2 + \|v\|_2)^2$.

На пространстве $\mathbb{R}^n$ можно также определить более общую норму ℓ_p, $p \geq 1$ формулой $\|(x_1, \dots, x_n)\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$; мы не будем доказывать неравенство 3 для этой нормы.

Пример 2. В линейном пространстве $C(X)$ функций, непрерывных на компакте X, можно определить норму равенством $\|y\|_C \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t \in X} |y(t)|$ (мы уже рассматривали ранее соответствующее метрическое и топологическое пространство в случае $X = [0, 1]$). В том же пространстве при $X = [0, 1]$ можно ввести норму L_p, $p \in \mathbb{R}_+$: $\|y\|_{L_p} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_0^1 |y(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$. Проверка определения нормы производится так же, как в примере 1 (проделайте для C, L_1 и L_2 !).

Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на одном и том же линейном пространстве U называются эквивалентными, если существуют такие константы $C > 0$ и $c > 0$, что $c\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq C\|u\|_1$ для всякого $u \in U$. Нетрудно проверить, что это на самом деле отношение эквивалентности. Эквивалентные нормы порождают одну и ту же топологию.

Пример 3. Все нормы примера 1 эквивалентны. На самом деле, $\|u\|_\infty \leq \|u\|_p \leq n^{1/p} \|u\|_\infty$, поэтому $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_\infty$ эквивалентны — следовательно, все нормы $\|\cdot\|_p$ эквивалентны друг другу.

Пример 4. Нормы C и L_1 примера 2 неэквивалентны. Действительно, $\|y\|_{L_1} \leq \|y\|_C$. Рассмотрим теперь последовательность функций $y_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & 0 \leq t \leq 1/n \\ 0, & 1/n \leq t \leq 1. \end{cases}$ Имеем: $\|y\|_C = 1$, но $\|y\|_{L_1} = 1/2n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому неравенство $\|y\|_C \leq C\|y\|_{L_1}$ для *всякой* функции $y \in C[0, 1]$ невозможно. На самом деле можно показать (постройте примеры !), что любые две нормы L_p с различными p не эквивалентны друг другу.

Пример 3 является частным случаем следующего утверждения:

Теорема 1. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ (то есть в произвольном конечномерном линейном пространстве) любые две нормы эквивалентны друг другу.*

Лемма 1. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ всякая норма является непрерывной функцией (в топологии прямого произведения нескольких экземпляров $\mathbb{R}$).*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис $\mathbb{R}^n$, т.е. $(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Из свойств 2 и 3 нормы следует, что $\|(x_1, \ldots, x_n)\| \leq |x_1| \, \|e_1\| + \cdots + |x_1| \, \|e_1\|$. Пусть последовательность векторов $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ сходится к вектору $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ покоординатно, т.е. $x_i^{(k)} \to x_i^*$ при $k \to \infty$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\|x^{(k)} - x^*\| \to 0$. Из свойства 3 получаем, что $|\|x^{(k)}\| - \|x^*\|| \leq \|x^{(k)} - x^*\|$ и, следовательно, $\|x^{(k)}\| \to \|x^*\|$. Поскольку последовательность $x^{(k)}$ произвольна, это означает непрерывность нормы. □

Доказательство теоремы 1. Докажем, что произвольная норма $\|\cdot\|$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_2$. Рассмотрим единичную сферу $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. Это замкнутое и ограниченное множество, поэтому, по лемме Гейне–Бореля, это компакт. Функция $\|\cdot\|$ достигает на этом компакте своего наименьшего значения c и своего наибольшего значения C. В силу требования 1 определения нормы $C > 0$ и $c > 0$. В силу требования 2 имеем для произвольного $x \neq 0$: $\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = 1$, поэтому $\frac{x}{\|x\|_2} \in S$. Следовательно, $c \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \leq C$, что эквивалентно $c \|x\|_2 \leq \|x\| \leq C \|x\|_2$. □

Следствие. *Топологии, порожденные на пространстве $\mathbb{R}^n$ всеми возможными нормами, совпадают. Для любой нормы $\|\cdot\|$ шар $B_R(a) \stackrel{def}{=} \{a \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq R\}$ — компакт.*

Пусть U, V — линейные нормированные пространства, $f : U \to V$ — отображение (не обязательно линейное), определенное в некоторой окрестности точки $x \in U$. Линейное отображение $f'(x) \in \mathrm{Lin}(U, V)$ называется *производной отображения f в точке x*, если $\|\omega(x, h)\|_V = o(\|h\|_U)$ при $\|h\|_U \to 0$, где $\omega(x, h) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(x + h) - f(x) - f'(x)h$. Коротко пишут: $f(x + h) = f(x) + f'(x)h + o(\|h\|)$. Если производная существует, то она единственна (докажите !). Очевидно, при замене нормы на эквивалентную понятие производной не меняется (поскольку не меняется понятие $o(\|h\|)$). Следовательно, при работе с производной в конечномерных линейных пространствах норму можно не указывать.

Пример 5. Пусть $U = V = \mathbb{R}$. Тогда $f'(x)$ — линейный оператор $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, состоящий в умножении на число $f'(x)$ (этим объясняется обозначение).

Пример 6. Пусть $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$. Отображение $f : U \to V$ это просто набор функций $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$.

Предложение. *Пусть все функции f_i, $i = 1, \ldots, m$ имеют в точке $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ непрерывные частные производные. Тогда отображение f дифференцируемо в этой точке, и матрица оператора $f'(x)$ равна $(a_{ij}) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Пусть $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда $f(x + h) - f(x) = (f(x_1^* + h_1, \ldots, x_n^* + h_n) - f(x_1^* + h_1, \ldots, x_{n-1}^* + h_{n-1}, x_n^*)) + (f(x_1^* + h_1, \ldots, x_{n-1}^* + h_{n-1}, x_n^*) - f(x_1^* + h_1, \ldots, x_{n-2}^* + h_{n-2}, x_{n-1}^*, x_n^*)) + \cdots + (f(x_1^* + h_1, x_2^*, \ldots, x_n^*) - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^* + h_1, \ldots, x_{n-1}^* + h_{n-1}, x_n^*)h_n + o(h_n) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, \ldots, x_n^*)h_1 + o(h_1) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*)h_n + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)h_1 + o(\|h\|)$ (в последнем равенстве использована непрерывность частных производных). □

Линейный оператор $A : U \to V$ (где U, V — нормированные пространства) называется ограниченным, если найдется константа $C > 0$ такая, что $\|Au\|_V \leq C \|u\|_U$ для произвольного вектора $u \in U$.

Теорема 2. *Если пространства $U.V$ конечномерны, то всякий линейный оператор $A : U \to V$ ограничен. В качестве константы C можно взять величину $\max_{\|x\|_U \leq 1} \|Ax\|_V$, называемую нормой оператора A и обозначаемую $\|A\|$. Норма оператора — наименьшая из возможных констант C. Норма оператора действительно является нормой в пространстве $\mathrm{Lin}(U, V)$. Норма удовлетворяет неравенству $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.*

Доказательство. В силу следствия теоремы 1 шар $B = \{x \in U \mid \|x\|_U \leq 1\}$ — компакт, а функция $\|Ax\|_V$ непрерывна и, следовательно, достигает на B своего максимума, равного $\|A\|$. Нетрудно видеть, что это происходит в точке x_* такой, что $\|x_*\| = 1$. В силу требования 2 определения нормы имеем для произвольного $x \neq 0$: $\frac{x}{\|x\|} \in B \Rightarrow \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|A\|$, что эквивалентно $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$. В точке x_* в этом неравенстве достигается точное равенство, поэтому константу $C < \|A\|$ взять нельзя. Отсюда сразу вытекает неравенство для нормы произведения: $\|ABx\| \leq \|A\| \, \|Bx\| \leq \|A\| \, \|B\| \, \|x\|$, откуда $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Проверка свойств 1, 2 и 3 определения нормы — упражнение. □

Теорема 3 ("правило дифференцирования сложной функции")**.** *Пусть отображение $f : U \to V$ имеет производную в точке u, отображение $g : V \to W$ имеет производную в точке $v = f(u)$, и обе производных являются ограниченными операторами.Тогда отображение $h = g \circ f : U \to W$ имеет производную в точке u, и $h'(u) = g'(v) \circ f'(u)$.*

Коротко: производная композиции равен композиции производных.

Доказательство. Пусть $\|w\| \to 0$. Тогда $h(u+w)-h(u) = g(f(u+w))-g(f(u)) = g(f(u)+f'(u)w+o(\|w\|)) - g(f(u)) = g'(v)(f'(u)w+o(\|w\|)) + o(\|f'(u)w+o(\|w\|)\|) = (g'(v)\circ f'(u))w + o(\|w\|)$ — в последнем равенстве использована ограниченность операторов $f'(u)$ и $g'(v)$. □

Теорема 4 (“правило дифференцирования обратной функции”)**.** *Пусть $f : U \to V$ — обратимое отображение, производная которого $f'(u)$ обратима, и обратный оператор $(f'(u))^{-1}$ ограничен. Пусть $v = f(u)$. Тогда $(f^{-1})'(v)$ существует и равна $(f'(u))^{-1}$.*

Коротко: производная обратного отображения равна обратному к производной.

Доказательство. Пусть $\|w\| \to 0$. Тогда $w = (u+w)-u = f^{-1}(f(u+w)) - f^{-1}(f(u)) = f^{-1}(f(u) + f'(u)w + o(\|w\|)) - f^{-1}(f(u))$. В силу обратимости $f'(u)$ для произвольного $r \in V$ найдется $w \in U$ такое, что $f'(u)w = r$. В силу ограниченности $(f'(u))^{-1}$ последнее равенство эквивалентно $f^{-1}(v+r+o(\|r\|)) - f^{-1}(v) = (f'(u))^{-1}r$; обозначая $\varrho = r + o(\|r\|)$, получим $f^{-1}(v+\varrho) - f^{-1}(v) = (f'(u))^{-1}\varrho + o(\|\varrho\|)$, что и означает требуемое. □