Задачи по алгебре 28 марта 2002г.

Элемент a алгебры A называется *нильпотентным*, если $a^N = 0$ для некоторого натурального N. Множество $\mathrm{Z}(\mathrm{A}) = \{c \in \mathrm{A} \,|ca = ac, \forall a \in \mathrm{A}\}$ называется *центром алгебры*.

1. Доказать, что никакое множество нильпотентных матриц не порождает $\mathrm{M}_n(F)$ как векторное пространство над полем F.

2. Пусть H — тело гамильтоновых кватернионов. Привести пример нильпотентной матрицы $\mathrm{A} \subset \mathrm{M}_2(\mathrm{H})$ с ненулевым следом.

3. Доказать, что элементы центра образуют коммутативную подалгебру в A.

4. Доказать, что неприводимое представление коммутативной алгебры над алгебраически замкнутым полем одномерно.

5. Доказать, что разложение Пирса $\mathrm{A} = \oplus e_i \mathrm{A} e_j$ тогда и только тогда является разложением в прямое произведение алгебр, когда "единички" e_i принадлежат центру алгебры A (e_i — центральные "единички").

6. Доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между разложениями в прямое произведение алгебры A и её центра.

7. Двумерная алгебра над полем F либо сама является полем, либо в ней можно выбрать базис $(1, b)$, такой, что $b^2 = b$ или $b^2 = 0$.

8. Дать определение фактор-модуля M/N A-модуля M по его подмодулю N и доказать теорему о гомоморфизме: для любого гомоморфизма $f\colon \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ ядро и образ являются подмодулями в M_1 и M_2 (соответственно), и $Im(f) \cong \mathrm{M}_1/Ker f$.

9. A-модуль M называется циклическим, если в нем есть такой элемент m_0, что $\mathrm{M} = m_0 \cdot \mathrm{A}$. Доказать, что циклический модуль изоморфен фактор-модулю модуля A по некоторому правому идеалу $R \subset \mathrm{A}$.

10. Доказать лемму Нетер: если I — идеал, а B — подалгебра в алгебре A, то $(\mathrm{B} + \mathrm{I})/\mathrm{I} \cong \mathrm{B}/\mathrm{B} \cap \mathrm{I}$.

11. Пусть I — идеал в алгебре A, $\mathrm{A} = \oplus e_i \mathrm{A} e_j$ — пирсовское разложение алгебры A. Доказать, что элемент $a = \sum a_{ij}$ лежит в I тогда и только тогда, когда $a_{ij} \in e_i \mathrm{I} e_j$.

12*. Опишите идеалы алгебры треугольных матриц.

13. Пусть X и Y — две матрицы из алгебры $\mathrm{A} = \mathrm{M}_n(F)$. Когда правые A-модули XA и YA изоморфны?

14. Доказать, что любая единичка в алгебре $\mathrm{M}_n(D)$ сопряжена с матрицей $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}_{ii}$ для некоторого $k \leqslant n$.