21.03.02

Определение 1. Под *евклидовым пространством* в данном листочке подразумевается $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ с *евклидовым* скалярным произведением $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. *Эрмитовым пространством* называется пространство $\mathbb{C}^n$ с *эрмитовым* скалярным произведением $(x, y) = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}$. Оператор в евклидовом (эрмитовом) пространстве называется *ортогональным (унитарным)*, если он сохраняет скалярное произведение, т. е. $(Ax, Ay) = (x, y)$. Оператор в евклидовом (эрмитовом) пространстве называется *симметрическим (эрмитовым)*, если $(x, Ay) = (Ax, y)$. Оператор в евклидовом (эрмитовом) пространстве называется *кососимметрическим (косоэрмитовым)*, если $(x, Ay) = -(Ax, y)$.

Задача 1. Доказать, что если оператор в евклидовом (эрмитовом) пространстве сохраняет длины векторов, то он ортогонален (унитарен).

Задача 2. Пусть $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_k$ — две системы векторов евклидова (эрмитова) пространства. Доказать, что ортогональный (унитарный) оператор, переводящий x_i в y_i, существует тогда и только тогда, когда $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$ при всех i и j.

Задача 3. Доказать, что если A — унитарный оператор в эрмитовом пространстве и оператор $A - E$ обратим, то оператор $i(A - E)^{-1}(A + E)$ эрмитов.

Задача 4. Пусть A — эрмитов оператор. Доказать, что

1. оператор $A - iE$ обратим;
2. оператор $B = (A - iE)^{-1}(A + iE)$ унитарен;
3. оператор $B - E$ обратим;
4. $A = i(B - E)^{-1}(B + E)$.

Задача 5. Доказать, что для всякого эрмитова оператора A оператор e^{iA} унитарен и, обратно, всякий унитарный оператор представим в виде e^{iA}, где A — эрмитов оператор.

Задача 6. (Углы Эйлера) Пусть V — евклидово пространство с базисом (e_1, e_2, e_3) и A — ортогональный оператор в V с определителем 1. Доказать, что $A = A_\varphi B_\theta A_\psi$, где A_φ и A_ψ — повороты в плоскости $\langle e_1, e_2\rangle$ на углы φ и ψ, B_θ — поворот в плоскости $\langle e_2, e_3\rangle$ на угол θ.

Задача 7. Доказать, что всякий ортогональный оператор A в евклидовом пространстве является произведением отражений относительно гиперплоскостей и минимальное число множителей равно коразмерности пространства $\mathrm{Ker}(A - E)$.

Задача 8. Доказать, что в разложении $A = BC$ оператора в евклидовом (эрмитовом) пространстве, где B — неотрицательный симметрический (эрмитов) оператор, C — ортогональный (унитарный) оператор, оператор B определён однозначно.

Задача 9. Найти все возможные собственные значения ортогонального (унитарного) оператора в евклидовом (эрмитовом) пространстве.

Задача 10. Показать, что в некотором ортонормированном базисе ортогональный (унитарный) оператор в пространстве $\mathbb{C}^n$ с евклидовым (эрмитовым) скалярным произведением имеет диагональный вид.

Задача 11. К какому простейшему виду (в ортонормированном базисе) можно привести матрицу ортогонального оператора в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$?

Задача 12. Доказать, что линейный оператор A в эрмитовом пространстве является косоэрмитовым тогда и только тогда, когда $A = iB$, где B — эрмитов оператор.

Задача 13. К какому простейшему виду (в ортонормированном базисе) можно привести матрицу косоэрмитова оператора в эрмитовом пространстве?

Задача 14. Доказать, что матрица кососимметрического оператора в двумерном евклидовом пространстве в любом ортонормированном базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in R$.

Задача 15. Доказать, что для всякого кососимметрического оператора в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором его матрица имеет клеточно-диагональный вид, где по главной диагонали стоят нули или клетки вида $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in R$.

Задача 16. Описать все операторы в $\mathbb{R}^n$, характеристический многочлен которого $\det(A - \lambda E)$ есть λ^n.