# Лекция 18. Замена переменных в интеграле

Эта лекция посвящена одной-единственной (но очень важной) *теореме о замене переменной.* Для того, чтобы ее сформулировать, введем следующее обозначение. Пусть $h\colon U \to V$ — дифференцируемая функция, где $U, V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые подмножества. Тогда через $J(h)$ будет обозначаться функция из $U$ в $\mathbb{R}$, ставящая в соответствие точке $x \in U$ якобиан функции $h$ в точке $x$. Иными словами, если в координатах функция $h$ записывается формулой

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto (\varphi_1(t_1, \dots, t_n), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_n)),$$

то $J(h)$ действует по формуле

$$J(h)\colon (t_1, \dots, t_n) \mapsto \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Теперь можно сформулировать теорему.

**Теорема 18.1 (о замене переменной).** *Пусть $h\colon U \to V = h(U)$ — диффеоморфизм (класса $C^1$) ограниченных открытых множеств в $R^n$ и $f\colon V \to \mathbb{R}$ — ограниченная непрерывная функция. Тогда*

$$\int_V f\,dx_1 \dots dx_n = \int_U (f \circ h)|J(h)|\,dt_1 \dots dt_n. \tag{18.1}$$

Прежде, чем приступать к доказательству, обсудим формулировку.

Отметим сразу же, что в этой формулировке не играет большой роли ни то, что множества $U$ и $V$ ограничены, ни то, что функция $f$ ограничена или даже непрерывна — все это издержки принятого в нашем курсе построения (увы, неполноценной) теории интегрирования (при правильном понимании слова «интеграл» достаточно считать, что функция $f$ «суммируема»). Кстати говоря, при нашем определении интеграла формулировка теоремы также не вполне корректна: модуль якобиана диффеоморфизма может быть неограничен (приведите соответствующий пример при $n = 1$), так что правая часть формулы (18.1) может быть неопределена. Эту некорректность можно устранить, если не требовать в определении 12.16 ограниченности интегрируемой функции, а просто называть функцию интегрируемой, если какой-нибудь из рядов (12.2) абсолютно сходится, но *эти* «обосновательские» проблемы мы сейчас проигнорируем. В любом случае содержательную часть теоремы о замене переменной составляет формула (18.1).

Далее, рассмотрим частный случай, когда отображение $h\colon U \to V$ — ограничение линейного автоморфизма $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Тогда якобиан $h$ постоянен и равен определителю линейного отображения $A$. Стало быть, для невырожденного линейного отображения $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеем

$$\int_{A(U)} f\,dx_1\ldots dx_n = |\det A| \int_U f\circ A\,dx_1\ldots dx_n.$$

Рассматривая еще более частный случай, когда $f$ тождественно равно единице, получаем, для невырожденного линейного $A$,

$$\mu(A(U)) = |\det A|\cdot \mu(U),$$

где $\mu$ — мера Лебега ограниченного открытого множества, определенная в лекции 12 (эта же формула верна и для любых «измеримых по Лебегу» множеств $U$). Стало быть, теорема 18.1 дает, в числе прочего, геометрическую интерпретацию определителя линейного оператора: абсолютная величина определителя — это то число, на которое умножается объем множества $U$ в результате действия этого оператора (знак определителя показывает, сохраняет ли оператор «ориентацию» векторного пространства над $\mathbb{R}$).

Наконец, как только теорема 18.1 будет доказана, можно будет утверждать, что верно аналогичное утверждение, в котором $f$ — функция со значениями в $\mathbb{C}$, а не $\mathbb{R}$ (для сведения «комплексного» варианта теоремы к «действительному» достаточно отделить действительную и мнимую часть).

Перейдем к доказательству теоремы[1]. Мы будем последовательно сводить ее утверждение к более или менее простым частным случаям.

**Лемма 18.2.** *Достаточно доказать теорему для случая, когда $f$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем, содержащимся в $V$.*

*Доказательство.* Пусть $f\colon V \to \mathbb{R}$ — произвольная ограниченная непрерывная функция, и пусть $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — счетное разбиение единицы на $V$ с компактными носителями, содержащимися в $V$. Согласно определению 12.16 имеем

$$\int_V f\,dx_1\ldots dx_n = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f\psi_i\,dx_1\ldots dx_n = \sum_{i=1}^{\infty}\int_V f\psi_i\,dx_1\ldots dx_n =$$

(так как теорема 18.1 верна, по предположению, для каждой из функций $f\psi_i$)

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\int_U (f\circ h)(\psi_i\circ h)|J(h)|\,dx_1\ldots dx_n = \int_U (f\circ h)|J(h)|\,dx_1\ldots dx_n$$

(поскольку $h$ — гомеоморфизм, $\{\psi_i\circ h\}_{i\in\mathbb{N}}$ образует разбиение единицы с компактными носителями на $U$). Утверждение доказано. □

[1] В этом доказательстве мы следуем учебнику В.А. Зорича.

**Лемма 18.3.** *Теорема 18.1 верна при* $n = 1$.

*Доказательство.* Проведем сначала доказательство для случая, когда множество $V \subset \mathbb{R}$ (стало быть, и гомеоморфное ему множество $U$) связно и тем самым является открытым интервалом — см. предложение 5.7. Ввиду шага 18.2 можно считать, что $\operatorname{supp} f \subset [a;b] \subset V$; тогда $\int_U f\,dx = \int_a^b f\,dx$.

Поскольку $h$ — диффеоморфизм, его производная на $U$ либо всюду положительна, либо всюду отрицательна. Разберем, например, случай, когда $f'(t) < 0$ для всех $t \in U$. Поскольку $h$ — монотонно убывающая функция на $U$, существует такой отрезок $[p;q] \subset U$, что $f(p) = b$ и $f(q) = a$ (и тем самым $f([p;q]) = [a;b]$). Если $F'(x) = f(x)$ на $[a;b]$, то $F \circ h$ — первообразная функции $(f \circ h) \cdot h'$ на $[p;q]$; поэтому

$$\int_U f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(h(p)) - F(h(q)) = \int_q^p f(h(t))h'(t)\,dt =$$
$$= \int_p^q f(h(t)) \cdot (-h'(t))\,dt = \int_U f \circ h \cdot |J(h)|\,dt.$$

Случай, когда множество $V$ несвязно, предоставляется читателю (надо воспользоваться тем обстоятельством, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}$ представляется в виде объединения непересекающихся открытых интервалов). □

**Лемма 18.4.** *Пусть* $h\colon U \to V$ *и* $k\colon V \to W$ *— диффеоморфизмы ограниченных открытых множеств. Если теорема о замене переменной верна для диффеоморфизмов* $h$ *и* $k$*, то она верна и для диффеоморфизма* $k \circ h\colon U \to W$.

*Доказательство.* Пусть $f$ — ограниченная непрерывная функция на $U$. Тогда имеем

$$\int_W f\,dy_1 \dots dy_n = \int_V (f \circ k)|J(k)|\,dt_1 \dots dt_n =$$
$$= \int_U (f \circ k \circ h)|J(k) \circ h| \cdot |J(h)|\,dy_1 \dots dy_n =$$
$$= \int_U (f \circ (k \circ h))|J(k \circ h)|\,dy_1 \dots dy_n,$$

поскольку из теоремы о производной композиции (предложение 14.4) и мультипликативности определителя следует, что для всех $t \in U$ выполнено тождество $J(k \circ h)(t) = J(k)(h(t)) \cdot J(h(t))$. Все доказано. □

Введем (исключительно для целей данного доказательства)

**Определение 18.5.** Диффеоморфизм $h\colon U \to V$ областей в $\mathbb{R}^n$ называется *элементарным,* если существует такой номер $k$, что для любой точки $t \in U$ отображение $f$ оставляет неизменными все ее координаты, кроме, быть может, координаты номер $k$.

**Лемма 18.6.** *Теорема 18.1 верна для элементарных диффеоморфизмов.*

*Доказательство.* Пусть элементарный диффеоморфизм $h\colon U \to V$ записывается в координатах формулой

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_{k-1}, \varphi(t_1, \dots, t_n), t_{k+1}, \dots, t_n).$$

Легко видеть, что $J(h)(t_1, \dots, t_n) = \partial\varphi(t_1, \dots, t_n)/\partial t_k$, и пусть $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ — проекция, определенная как «забывание» $k$-ой координаты:

$$p\colon (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n).$$

Положим $V' = p(V) \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Легко видеть, что множество $V'$ открыто; кроме того, так как отображение $h$ не трогает никакие коодинаты, кроме $k$-ой, выполнены равенства $p(U) = p(V) = V'$ и $p \circ h = p$. В частности, для всякой точки $y \in V'$ имеет место соотношение $h(p^{-1}(y) \cap U) = p^{-1}(y) \cap V$; если отождетсвить $p^{-1}(y) \cap U$ и $p^{-1}(y) \cap V$ с открытыми подмножествами в $\mathbb{R}$, то диффеоморфизм первого из этих множеств на второе, индуцированный отображением $h$, запишется в виде

$$t \mapsto \varphi(t_1, \dots, t_{k-1}, t, t_{k+1}, \dots, t_n),$$

где $y = (t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n) \in V'$.

Пусть теперь $f$ — функция на $V$. Посчитаем интеграл от $f$ по $V$ с помощью сведéния к повторному (теорема (12.20)); в нижеследующей формуле $y = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ обозначает точку области $V'$, а $dy$ означает $dx_1 \dots x_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n$.

$$\int_V f\, dx_1 \dots dx_n = \int_{V'} dy \left( \int_{p^{-1}(y) \cap V} f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) \right). \tag{18.2}$$

Обозначая интеграл в скобках через $I(y)$, применим к нему теорему о замене переменной для случая $n = 1$:

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_{p^{-1}(y) \cap U} f(x_1, \dots, x_{k-1}, \varphi(t_1, \dots, t_n), x_{k+1}, \dots, x_n) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t_k} \right| dt_k = \\ &= \int_{p^{-1}(y) \cap U} f(x_1, \dots, x_{k-1}, \varphi(t_1, \dots, t_n), x_{k+1}, \dots, x_n) |J(h)|\, dt_k. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение для $I(y)$ в (18.2) и применяя еще раз теорему 12.20, получаем, что правая часть (18.2) равна

$$\int_U f(t_1, \dots, t_{k-1}, \varphi(t_1, \dots, t_n), t_{k+1}, \dots, t_n) \cdot |J(h)|\, dt_1 \dots dt_n,$$

что и требовалось. □

Если бы мы могли доказать, что всякий диффеоморфизм представляется в виде композиции элементарных, теорема немедленно бы следовала из лемм 18.4 и 18.6. К сожалению, это утверждение неверно. Тем не менее требуемое разложение всегда существует локально.

**Предложение 18.7.** *Пусть $h\colon U \to V$ — диффеоморфизм открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Тогда сущетсвует такое открытое покрытие $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, что каждый из диффеоморфизмов $f|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to f(U_\alpha)$ представлятеся в виде композиции элементарных.*

*Доказательство.* Начнем с простой леммы.

**Лемма 18.8.** *Пусть $\sigma\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ — перестановка. Если линейное отображение $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ задается формулой*

$$(t_1,\dots,t_n) \mapsto (t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(n)}),$$

*то отображение $A$ представлятеся в виде композиции элементарных диффеоморфизмов.*

*Доказательство леммы.* Поскольку всякая перестановка являтеся произведением транспозиций, достаточно доказать лемму для случая, когда $\sigma$ — транспозиция, то есть когда $A$ меняет местами всего две координаты. Вот как этого можно достичь с помощью цепочки «элемнетарных» (то есть меняющих только одну координату) линейных преобразований (координаты, не участвующие в обмене, мы не пишем):

$$(x,y) \mapsto (x+y,y) \mapsto (x+y,(x+y)-y) = (x+y,x) \mapsto ((x+y)-x,x).$$

$\square$

Выберем теперь произвольно точку $p \in U$, и пусть отображение $h$ задается формулой

$$(t_1,\dots,t_n) \mapsto (\varphi_1(t_1,\dots,t_n),\dots,\varphi_n(t_1,\dots,t_n)).$$

Поскольку $Dh(p)$ невырождена, сущетсвует такой номер $k$, что $(\partial\varphi_1/\partial t_k)(p) \neq 0$. Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, пменяющее местами координаты номер $k$ и номер 1 (если нам так повезло, что $k = 1$, то пусть $A$ — тождественное преобразование). Отображение $A \circ h\colon U \to \mathbb{R}^n$. будет диффеоморфизмом на свой образ. Определим отображение $e\colon U_1 \to \mathbb{R}^n$ по формуле

$$(t_1,\dots,t_n) \mapsto (\varphi_k(t_1,\dots,t_n),t_2,\dots,t_n).$$

Якобиан отображения $h_1$ равен, очевидно, $\partial\psi_1/\partial t_1$ и, стало быть, не равен нулю в точке $p$. По теореме об обратной функции существует такое открытое множество $U_1 \subset U$, что $h_1|_{U_1}$ — диффеоморфизм на свой образ; более того, этот диффеоморфизм является элементарным. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"] & h(U_1) \arrow[d, "A"] \\
h_1(U_1) \arrow[r, dashed, "h_1"] & A(h(U_1)).
\end{tikzcd} \tag{18.3}$$

В ней все сплошные стрелки являются диффеоморфизмами, так что существует пунктирная стрелка $h_1$, также являющаяся диффеоморфизмом и делающая диаграмму «коммутативной» (попросту говоря, $h_1 = A \circ h \circ e^{-1}$). Заметим, что отображение $h_1$ первую координату не меняет. Стало быть, из (18.3) вытекает, что диффеоморфизм $h$, ограниченный на подмножество $U_1 \ni p$, представлятеся в виде композиции нескольких элементарных диффеоморфизмов (именно, $h_1^{-1}$ и элементарные линейные преобразования, композиция которых составляте $p$) и диффеоморфизма $h_1$, не меняющего первую координату. Если размерность равняется двум, на этом все и кончается, так как диффеоморфизм $h_1$ тогда тоже элементарен. В общем случае поступим вот как. Если

$$h_1\colon (t_1,\dots,t_n) \mapsto (t_1, \eta_2(t_1,\dots,t_n),\dots,\eta_n(t_1,\dots,t_n)),$$

то

$$J(h_1) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\eta_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial\eta_2}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\eta_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial\eta_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Поскольку $J(h)(p) \neq 0$, существует такой номер $k$, что $2 \leqslant k \leqslant n$ и $(\partial\eta_k/\partial t_2)(p) \neq 0$. Теперь повторим конструкцию: рассмотрим линейное отображение $B$, меняющее мествами координаты номер два и номер $k$, положим

$$h_2(t_1,\dots,t_n) = (t_1, \eta_k(t_1,\dots,t_n), t_3,\dots,t_n)$$

выберем содержащее точку $p$ открытое подмножество $U_2 \subset U_1$, ... — в результате окажется, что диффеоморфизм $h$, ограниченный на $U_2$, предстляется в виде композиции скольких-то элементарных и диффеоморфизма, оставляющего на месте уже *две* координаты. Продолжая в том же духе, доходим до искомого разложения. □

*Завершение доказательства теоремы.* Пусть, в условиях теоремы 18.1, $U = \bigcup_{U_\alpha}$, где для всякого $\alpha$ ограничение $h|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to h(U_\alpha) = V_\alpha$ представлятеся в виде композиции элементарных диффеоморфизмов. Пусть $\{\pi_i\}$ — разбиение единицы на $V$, с компактными носителями, подчиненное покрытию $\{V_\alpha\}$. Тогда, ввиду уже доказанного,

$$\int_V f\pi_i\,dx = \int_U (f\circ h)(\pi_i\circ h)|J(h)|\,dt \qquad (18.4)$$

для всякого $i$. Поскольку, очевидно, $\{\pi_i \circ h\}$ — разбиение единицы с компактными носителями, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$, все следует из (18.4) и нашего определения интеграла по открытому множеству. □