Лекция 11. Кратные интегралы

В прошлом семестре мы интегрировали непрерывные функции одного переменного по отрезку, а сейчас будем интегрировать непрерывные функции n переменных по параллелепипеду в $\mathbb{R}^n$. Начнем с простейших определений.

Определение 11.1. Пусть $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2, \ldots, a_n < b_n$ — n пар действительных чисел. Тогда *n-мерным параллелепипедом* называется множество

$$X = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n \} .$$

Объемом параллелепипеда X называется число

$$\operatorname{vol}(X) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n).$$

Вспомним еще из первого семестра, что прямым (или декартовым) произведением множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар $(x; y)$, где $x \in X$, а $y \in Y$. Если X и Y — топологические пространства, то $X \times Y$ наделяется естественной топологией произведения (определение 4.12). В частности, $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}$, а n-мерный параллелепипед $X \subset \mathbb{R}^n$ из определения 11.1 есть не что иное, как $[a_1; b_1] \times \cdots \times [a_n; b_n]$. Если $X \subset \mathbb{R}^m$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ — два параллелепипеда, то $X \times Y \subset \mathbb{R}^n$ — также параллелепипед, причем, как легко видеть, $\operatorname{vol}(X \times Y) = \operatorname{vol}(X) \times \operatorname{vol}(Y)$.

Чтобы понять, как было бы разумно определять интеграл функции по параллелепипеду, вспомним для начала геометрический смысл интеграла от функции одного переменного. Если $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция с неотрицательными значениями, то $\int_a^b f(x)\,dx$ есть площадь «криволинейной трапеции» — фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Пусть теперь f — неотрицательная непрерывная функция на двумерном параллелепипеде (то есть прямоугольнике) $X = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \subset \mathbb{R}^2$ (предположим, для простоты обозначений, что $a_1 = a_2 = 0$). Тогда график функции $z = f(x, y)$ является поверхностью, и естественно считать, что $\int_X f(x, y)\,dxdy$ равен объему тела, заключенного между этим графиком и прямоугольником X (рис 11.1). Однако же для вычисления объемов тел в $\mathbb{R}^3$ есть известный рецепт (более или менее эквивалентный «принципу Кавальери»): для всякого числа c обозначим через $S(c)$ площадь фигуры, получающейся в результате сечения тела плоскостью с уравнением $x = c$ (на рис. 11.1 эта фигура заштрихована); тогда объем тела равен интегралу $\int S(x)\,dx$. С другой стороны, заштрихованная фигура является криволинейной

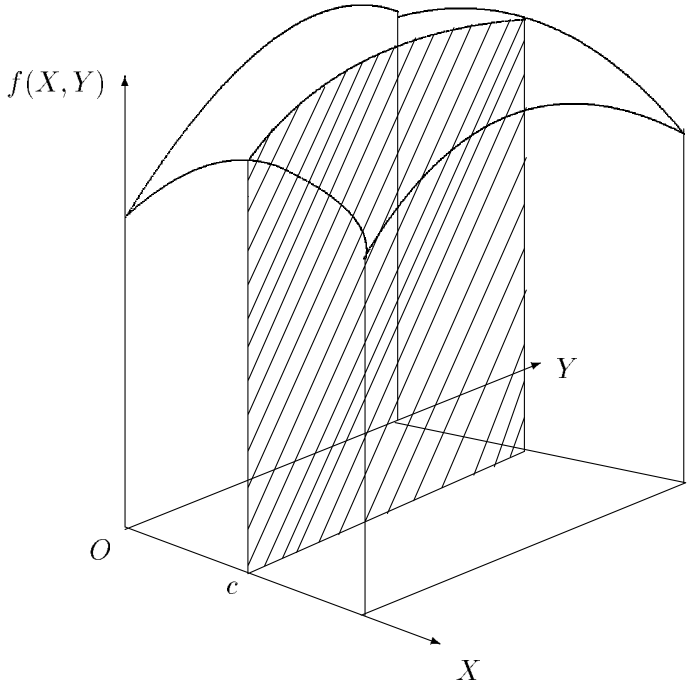

Рис. 11.1. Сведение двойного интеграла к повторному

трапецией, ограниченной графиком функции $y \mapsto f(c, y)$, и ее площадь равна $\int_{a_2}^{b_2} f(c, y)\, dy$. Стало быть, объем под графиком функции f равен

$$\int_X f(x, y)\, dxdy = \int_{a_1}^{b_1} S(x)\, dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy \right) dx. \qquad (11.1)$$

Итак, мы выяснили, каким свойством должен, при разумном определении, обладать интеграл от непрерывной функции по прямоугольнику. Теперь, чтобы определить интеграл, обладающий свойством (11.1), выберем лобовой путь: объявим саму формулу (11.1) определением! Поскольку нам нужны интегралы по n-мерным параллелепипедам для любого n, точное определение выглядит так:

Определение 11.2. Если $n = 1$, то интегралом от непрерывной функции f по одномерному параллелепипеду (т.е. отрезку) $[a; b] \subset \mathbb{R}$ называется $\int_a^b f(x)\, dx$.

Если $X = [a_1; b_1] \times \tilde{X} \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерный параллелепипед, представленный в виде произведения отрезка на $n-1$-мерный параллелепипед, и $f\colon X \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, то интегралом f по X называется число

$$\int_X f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n=\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{\tilde X} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_2\dots dx_n\right)dx_1. \tag{11.2}$$

К этому определению необходимы комментарии.

Во-первых, наше определение интеграла по n-мерному параллелепипеду «рекурсивно»: исходя из уже имеющегося определения для $n=1$, мы определяем интеграл для $n=2$, исходя из определения для $n=2$, мы определяем интеграл для $n=3$, и. т. д.

Во-вторых, чтобы наше определение было корректно, необходимо, чтобы интеграл по dx_1 в правой части формулы (11.2) имел смысл, а для этого необходимо что-то доказать про функцию

$$x_1\mapsto\int_{\tilde X} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_2\dots dx_n$$

(интеграл от совершенно произвольной функции определить невозможно!). Итак, займемся проверкой корректности определения.

Начнем с такой леммы (напомним, что через $C(Y)$ обозначается пространство непрерывных функций на компактном пространстве Y):

Лемма 11.3. *Пусть X — хаусдорфово пространство, Y — компактное хаусдорфово пространство, и пусть $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$ — непрерывная функция. Для всякого $x\in X$ рассмотрим функцию $f_x\colon Y\to\mathbb{C}$, определенную по формуле $f_x(y)=f(x,y)$. Тогда отображение $\Phi\colon X\to C(Y)$, заданное по формуле $x\mapsto f_x$, является непрерывным (если топологию на $C(Y)$ задавать с помощью* sup*-нормы).*

Доказательство. Докажем непрерывность Φ в произвольной точке $x\in X$. Зафиксируем число $\varepsilon>0$; тогда для всякого $y\in Y$ найдутся такие открытые множества $U_y\subset X$ и $V_y\subset Y$, что $U_y\ni x$, $V_y\ni y$, и $|f(x_1,y_1)-f(x,y)|\leqslant\varepsilon$, как только $x_1\in U_y$ и $y_1\in V_y$. Поскольку Y компактно, имеем $Y=V_{y_1}\cup\dots\cup V_{y_n}$ для некоторых $y_1,\dots,y_n\in Y$. Положим $U=U_{y_1}\cap\dots\cap U_{y_n}\subset X$; если $x'\in U$, то, поскольку всякий $y\in Y$ лежит в каком-то из V_{y_j}, имеем $|f(x,y)-f(x',y)|\leqslant\varepsilon$ для всякого $y\in Y$. Стало быть, $\|f_{x'}-f_x\|\leqslant\varepsilon$ при всех $x'\in U$, что и доказывает непрерывность. □

Замечание 11.4. Переход от f к Φ — стандартный трюк: отображение из $X\times Y$ в Z рассматривается как семейство отображений из Y в Z, параметризованное точками из X.

Теперь докажем корректность определения интеграла.

Предложение 11.5. *Для всякого $n\in\mathbb{N}$ рассмотрим следующие утверждения:*

A_n: *Правая часть формулы (11.2) имеет смысл для всякого n-мерного параллелепипеда $X = [a_1; b_1] \times \tilde{X} \subset \mathbb{R}^n$, где $\tilde{X}$ — $n-1$-мерный параллелепипед.*

B_n: *Верно утверждение A_n, и для всякой функции $f \in C(X)$, где X — n-мерный параллелепипед, выполнено неравенство*

$$\left| \int_X f \, dx_1 \dots dx_n \right| \leqslant \operatorname{vol}(X) \cdot \|f\|.$$

C_n: *Верно утверждение A_n, и для всякого n-мерного параллелепипеда X отображение из $C(X)$ в $\mathbb{C}$, заданное формулой $f \mapsto \int_X f \, dx_1 \dots dx_n$, является непрерывным.*

Тогда для всякого $n \geqslant 1$ верна импликация $B_n \Rightarrow C_n$ и для всякого $n \geqslant 2$ верны импликации $C_{n-1} \Rightarrow A_n$ и $A_n \wedge B_{n-1} \Rightarrow B_n$.

Доказательство.

$B_n \Rightarrow C_n$: для $f, g \in C(X)$ имеем

$$\left| \int_X f \, dx_1 \dots dx_n - \int_X g \, dx_1 \dots dx_n \right| = \left| \int_X (f-g) \, dx_1 \dots dx_n \right| \leqslant \operatorname{vol}(X) \cdot \|f-g\|,$$

так что при $\|f-g\| < \varepsilon / \operatorname{vol}(X)$ имеем

$$\left| \int_X f \, dx_1 \dots dx_n - \int_X g \, dx_1 \dots dx_n \right| < \varepsilon,$$

откуда непрерывность очевидна.

$C_{n-1} \Rightarrow A_n$: из утверждения C_{n-1} и леммы 11.3 немедленно вытекает, что функция $x_1 \mapsto \int_{\tilde{X}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_2 \dots dx_n$ непрерывна на отрезке $[a_1; b_1]$, а что такое интеграл от непрерывной функции одного переменного по отрезку, мы знаем.

$A_n \wedge B_{n-1} \Rightarrow B_n$: если для $c \in [a_1; b_1]$ обозначить через $f_c \colon \tilde{X} \to \mathbb{C}$ функцию, действующую по правилу $(x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то $\|f_c\| \leqslant \|f\|$ для всякого c, так что ввиду B_{n-1} имеем $\left| \int_{\tilde{X}} f_c \, dx_2 \dots dx_n \right| \leqslant \operatorname{vol}(\tilde{X}) \cdot \|f_c\| \leqslant \operatorname{vol}(\tilde{X}) \cdot \|f\|$. Следовательно, имеем[1]

$$\left| \int_X f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n \right| \leqslant \int_{a_1}^{b_1} \left| \int_{\tilde{X}} f_{x_1}(x_2, \dots, x_n) \, dx_2 \dots dx_n \right| dx_1 \leqslant$$
$$\leqslant \int_{a_1}^{b_1} \operatorname{vol}(\tilde{X}) \cdot \|f\| \, dx_1 = \operatorname{vol}(\tilde{X}) \cdot (b_1 - a_1) \|f\| = \operatorname{vol}(X) \cdot \|f\|,$$

что и требовалось. □

[1] В нижеследующей выкладке мы воспользуемся неравенством $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)| \, dx$, которое, формально говоря, в первом семестре не доказывалось. При принятом в нашем курсе определении интеграла это можно доказать так: для ступенчатых функций f неравенство очевидно, далее переходим к пределу.

Поскольку утверждение B_1 заведомо верно (это не что иное, как предложение 6.18(2) из первого семестра), доказанное предложение показывает, что, рассуждая по схеме

$$B_1 \Rightarrow C_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow B_2 \Rightarrow C_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \dots,$$

мы докажем A_n для всех $n \geqslant 2$ и тем самым корректность определения интеграла.

Та же цепочка рассуждений устанавливает истинность всех утверждений B_n и C_n. Зафиксируем это вкупе с еще несколькими свойствами интеграла, бесхитростное доказательство которых (индукцией по размерности) предоставляется читателю:

Предложение 11.6. *Пусть X — n-мерный параллелепипед.*

1) *Если f, g — непрерывные функции на X и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ — константы, то*

$$\int_X (\lambda f + \mu g)\, dx_1 \dots dx_n = \lambda \int_X f\, dx_1 \dots dx_n + \mu \int_X g\, dx_1 \dots dx_n.$$

2) *Для всякой функции $f \in C(X)$ выполнено неравенство*

$$\left| \int_X f\, dx_1 \dots dx_n \right| \leqslant \operatorname{vol}(X) \cdot \|f\|.$$

3) *Для всякой функции $f \in C(X)$ выполнено неравенство*

$$\left| \int_X f\, dx_1 \dots dx_n \right| \leqslant \int_X |f|\, dx_1 \dots dx_n.$$

4) *Если f, g — непрерывные функции на X с вещественными значениями и $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \in X$, то $\int_X f\, dx_1 \dots dx_n \geqslant \int_X g\, dx_1 \dots dx_n$.*

5) *Если последовательность функций $f_n \in C(X)$ равномерно сходится к функции f, то $\int_X f\, dx_1 \dots dx_n = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, dx_1 \dots dx_n$.*

5′) *Отображение $f \mapsto \int_X f\, dx_1 \dots dx_n$ является непрерывным отображением из $C(X)$ в $\mathbb{C}$.*

Итак, интегрировать непрерывные функции по параллелепипеду мы научились. Однако же исходная цель — построение теории интегрирования, в которой кратный интеграл сводится к повторному — все еще не достигнута: согласно нашему определению, такое сведение гарантируется только при интегрировании в определенном порядке (сначала по x_n, затем по x_{n-1}, и т. д.). В то же время было бы естественно, чтобы в «правильной» теории интеграла в формуле (11.1) обе части равнялись также $\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\right)dy$, а также выполнялись и другие аналогичные равенства, наподобие

$$\int f(x,y,z)\,dxdydz = \int\left(\int f(x,y,z)\,dxdz\right)dy.$$

Сформулируем теорему, частными случаями которой будут все аналогичные формулы:

Теорема 11.7. *Пусть $X=[a_1;b_1]\times\dots\times[a_n;b_n]$ — n-мерный параллелепипед, и пусть $\{1,2,\dots,n\}=\{i_1,\dots,i_k\}\cup\{j_1,\dots,j_l\}$, где $k+l=n$. Положим $X_1=[a_{i_1};b_{i_1}]\times\dots\times[a_{i_k};b_{i_k}]$ и $X_2=[a_{j_1};b_{j_1}]\times\dots\times[a_{j_l};b_{j_l}]$. Тогда для всякой функции $f\in C(X)$ имеем*

$$\begin{aligned}\int_X f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n &=\\ &=\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_{j_1}\dots dx_{j_l}\right)dx_{i_1}\dots dx_{i_k}.\end{aligned}\tag{11.3}$$

(Выражение в скобках в правой части является функцией от x_{i_1}, …, x_{i_k}, и эта функция интегрируется по X_1.)

Замечание 11.8. Теорема 11.7 — это частный случай теоремы Фубини. Другой частный случай этой теоремы встретился нам в первом семестре (лекция 8).

Доказательство. Обозначим левую часть формулы (11.3) через $I_1(f)$, а правую — через $I_2(f)$. Легко видеть, что для всякой функции $f\in C(X)$ выполнены неравенства $|I_1(f)|\leqslant\|f\|\cdot\operatorname{vol}(X)$ и $|I_2(f)|\leqslant\|f\|\cdot\operatorname{vol}(X)$ (для I_1 это предложение 11.6(2), для I_2 устанавливается теми же рассуждениями, что в доказательстве предложения 11.5).

Предположим теперь, что для всякой функции $f\in C(X)$ и для всякого $\varepsilon>0$ найдется такая функция $g\in C(X)$, что $\|f-g\|<\varepsilon$ и $I_1(g)=I_2(g)$. Тогда наша теорема будет установлена: цепочка неравенств

$$\begin{aligned}|I_1(f)-I_2(f)|&\leqslant|I_1(f)-I_1(g)|+|I_1(g)-I_2(g)|+|I_2(f)-I_2(g)|=\\ &=|I_1(f-g)|+|I_2(f-g)|\leqslant 2\operatorname{vol}(X)\cdot\|f-g\|\leqslant 2\varepsilon\operatorname{vol}(X)\end{aligned}$$

показывает, ввиду произвольности ε, что $I_1(f)=I_2(f)$ для любой непрерывной функции f.

Как же, однако, найти такую функцию g? Пусть $h_1\colon[a_1;b_1]\to\mathbb{C}$, …, $h_n\colon[a_n;b_n]\to\mathbb{C}$ — произвольные непрерывные функции. Положим

$$h(x_1,x_2,\dots,x_n)=h_1(x_1)h_2(x_2)\dots h_n(x_n).\tag{11.4}$$

Тогда легко видеть, что

$$I_1(h) = I_2(h) = \int_{a_1}^{b_1} h_1(x_1)\,dx_1 \int_{a_2}^{b_2} h_2(x_2)\,dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} h_1(x_n)\,dx_n;$$

отсюда ясно, что I_1 и I_2 совпадают и для всякой функции, являющейся конечной суммой функций вида (11.4). Стало быть, все свелось к такому утверждению:

Лемма 11.9. *Пусть $X = [a_1; b_1]\times\cdots\times[a_n; b_n]$ — n-мерный параллелепипед. Тогда для всякой функции $f \in C(X)$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такая функция g, являющаяся конечной суммой функций вида* (11.4), *что $\|f - g\| < \varepsilon$.*

□

Доказательство леммы 11.9 — это отдельное предприятие. Для начала давайте неформально объясним, почему утверждение этой леммы выглядит правдоподобно.

Предположим на мгновение, что $C(X)$ состоит не из всех непрерывных функций на параллелепипеде X, а только из многочленов. Тогда верно даже более сильное утверждение, чем лемма 11.9: каждый многочлен *равен* конечной сумме одночленов, а каждый одночлен имеет вид (11.4). Стало быть, лемма 11.9 немедленно следует из «теоремы Вейерштрасса», утверждающей, что множество многочленов плотно в $C(X)$, где X — параллелепипед. Мы не будем доказывать теорему Вейерштрасса (по крайней мере сейчас); вместо этого мы выведем лемму 11.9 из некоторого ее (леммы) обобщения. Начнем с того, что сформулируем это обобщение.

Итак, пусть X и Y — хаусдорфовы компактные про странства, и пусть $f \in C(X)$, $g \in C(Y)$. Рассмотрим функцию $f\otimes g\colon X\times Y \to \mathbb{C}$ (читается «f тензор g»), действующую по правилу $(x; y) \mapsto f(x)g(y)$. Через $C(X)\otimes C(Y)$ обозначим пространство функций на $X\times Y$, представимых в виде $f_1 \otimes g_1 + \cdots + f_m \otimes g_m$, где все f_i лежат в $C(X)$, а все g_i лежат в $C(Y)$. Очевидно, $C(X) \otimes C(Y) \subset C(X \times Y)$.

Предложение 11.10. *Если X и Y — хаусдорфовы компактные пространства, то $C(X) \otimes C(Y)$ плотно в $C(X \times Y)$ (относительно топологии, задаваемой* sup*-нормой).*

Вывод леммы 11.9 из предложения 11.10. При $n = 2$ лемма 11.9 является частным случаем предложения 11.10. В общем случае применим индукцию по n.

Итак, пусть для $n-1$-мерных параллелепипедов лемма доказана, и пусть $F \in C(X)$, где $X = [a_1; b_1] \times \cdots \times [a_n; b_n]$. Имеем $X = X' \times [a_n; b_n]$, где $X' = [a_1; b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}; b_{n-1}]$. Ввиду предложения 11.10, для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие функции $f_1, \ldots, f_m \in C(X')$

и $g_1, \dots, g_m \in C[a_n; b_n]$, что $\|f - (f_1 \otimes g_1 + \dots + f_m \otimes g_m)\| < \varepsilon/2$. Пусть $M = \max\{\|g_i\|\}$; по предположению индукции найдутся функции $h_1, \dots, h_m \in C([a_1; b_1]) \otimes \dots \otimes C([a_{n-1}; b_{n-1}])$, что $\|f_i - h_i\| < \varepsilon/2mM$ для всех i. Легко видеть, что

$$\|f - \sum h_i \otimes g_i\| \leqslant \|f - \sum f_i \otimes g_i\| + \sum \|f_i - h_i\| \cdot \|g_i\| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon/2 + m \cdot (\varepsilon/2mM) \cdot M = \varepsilon;$$

с другой стороны, ясно, что функция $\sum h_i \otimes g_i$ имеет вид (11.4), что и завершает доказательство. □

Замечание 11.11. Для тех, кто уже знает, что такое тензорное произведение векторных пространств: обязательное упражнение — доказать, что пространство $C(X) \otimes C(Y)$ изоморфно тензорному произведению $C(X)$ и $C(Y)$, и при этом изоморфизме $f \otimes g$ в нашем смысле переходит в $f \otimes g$ в смысле линейной алгебры.

Доказательство предложения 11.10 будет дано в следующей лекции.