Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 15 сентября 1999 года

Определение. Отображение $M \to N$ называется *гладким*, где $M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$ — гладкие подмногообразия, если в каждой локальной карте оно задается гладкими функциями. Подмногообразия M и N называются *диффеоморфными*, если между ними существует биективное отображение, гладкое вместе с обратным.

Это определение приводит нас к следующему общему понятию:
Определение. *Гладким многообразием* размерности n называется связное множество M, представленное в виде объединения $M = \bigcup U_\alpha$, вместе с заданными взаимно однозначными соответствиями $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, где $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ — открытые области евклидова пространства. Подмножества U_α называются *картами*, а их совокупность — *атласом.* При этом разные карты должны быть согласованы: если $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, то отображения $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha^{-1}(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ должны быть диффеоморфизмами областей евклидова пространства.

Наличие атласа превращает многообразие в топологическое пространство. Обычно требуется (и мы будем следовать этим соглашениям) выполнение двух дополнительных условий: *сепарабельности* и *отделимости.* На языке карт первое условие означает, что существует атлас, состоящий из не более, чем счетного числа карт. Второе означает, что для любых двух точек найдется допустимый атлас, в котором эти точки принадлежат различным непересекающимся картам.

Замечание. В зависимости от класса гладкости отображений $\varphi_{\alpha\beta}$ многообразия делятся на *топологические*, C^p*-гладкие*, *бесконечно гладкие* и *аналитические.* При этом последние три класса многообразий эквивалентны в следующем смысле: если некоторые два многообразия с некоторыми структурами на них диффеоморфны, то можно на этих многообразиях ввести (согласованные с исходными) структуры любой другой (одинаковой) гладкости с тем, чтобы они снова были диффеоморфны. Но существуют такие гомеоморфные топологические многообразия, на которых нельзя ввести даже C^1-гладкой (согласованной с исходной) структуры с тем, чтобы эти многообразия стали диффеоморфны.

1. Дайте определения гладких отображений гладких многообразий, диффеоморфных гладких многообразий.

2. Докажите, что если M компактно, то M диффеоморфно некоторому подмногообразию евклидова пространства $\mathbb{R}^N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$.

3. Докажите, что одномерное многообразие диффеоморфно интервалу или окружности.

4. (a) Вспомните, какие бывают компактные ориентируемые двумерные многообразия (все они получаются приклеиванием некоторого количества ручек к сфере).

(b) Компактные неориентируемые двумерные многообразия также можно получать из сферы приклеиванием ручек и вклеиванием (по границам) некоторого ненулевого количества листов Мёбиуса в вырезанные для этого дырки (диффеоморфные дискам). Какие из получаемых таким образом многообразий будут диффеоморфны? Как с помощью такой конструкции можно получить проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ и бутылку Клейна Kl?

5. Определите структуру гладкого (трёхмерного) многообразия на следующих множествах. Какие из них диффеоморфны?
   (a) Сфера S^3.
   (b) Проективное пространство $\mathbb{R}P^3$ (пространство прямых в $\mathbb{R}^4$).
   (c) Прямое произведение $S^1 \times S^2$.
   (d) Группа $SO(3)$ вращений трехмерного пространства (ортогональных 3×3 матриц, определитель которых равен 1).
   (e) Группа $SU(2)$ эрмитовых 2×2 матриц, определитель которых равен 1.
   (f) Пространство касательных единичных векторов к единичной сфере.
   (g) Подмножество в $\mathbb{R}^6 = \mathbb{C}^3$, заданное уравнениями $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$; $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 2$.
   (h) Пространство конфигураций твердого тела с одной закрепленной точкой.

Определение. Множество прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через 0, снабжённое подходящей топологией, называется *проективным n-мерным вещественным пространством.* Обозначение: $\mathbb{R}P^n$.

Другими словами, $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, где $(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n)$ тогда и только тогда, когда $x_i = \lambda y_i$, $0 \leq i \leq n$ для некоторого $\lambda \neq 0$. Выражение $[x_0 : \cdots : x_n]$ называется *однородными координатами* прямой $\langle 0, (x_0, \ldots, x_n)\rangle \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Замечание. Однородные координаты не являются координатами.

6. Определите для $\mathbb{R}P^n$:
   (a) размерность;
   (b) карты и функции перехода;
   (c) при каких n оно ориентируемо.

Определение. Множество k-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, проходящих через 0, снабжённое подходящей топологией, называется *многообразием Грассмана* и обозначается $G_{k,n}$.

Замечание. $G_{1,n+1} = \mathbb{R}P^n$, $G_{k,n} = G_{n-k,n}$.

7. Определите для $G_{k,n}$:

   (a) размерность;

   (b) карты и функции перехода;

   (c) при каких k, n оно ориентируемо.

8. Пусть $M^n \subset \mathbb{R}^N$ — гладкое подмногообразие. Докажите, что если $N > 2n+1$, то $\exists l \in \mathbb{R}P^{N-1}$ такая, что $P_l : M \to \mathbb{R}^{N-1}$ — вложение (здесь P_l — проекция вдоль прямой l).