Листок 8

Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_s, \ldots$ — последовательность симплициальных разбиений компактного ориентированного многообразия M (возможно, с краем), мелкость которых стремится к 0. Пусть $a_0^{(i,s)}, \ldots, a_k^{(i,s)}$ — вершины i-го симплекса разбиения τ_s, упорядоченные в соответствии с ориентацией. Пусть $f \in F_{n+1}(M)$ (n — размерность многообразия M). Тогда, по определению, интегралом f по M называется $\lim_{s\to\infty} \sum_i f(a_0^{(i,s)}, \ldots, a_k^{(i,s)})$ (сумма берется по всем симплексам соответствующего разбиения).

Задача 1. Докажите, что если $f \in J_{k+1}(M)$, то интеграл равен 0.

Из задачи 1 следует, что корректно определен интеграл $\int_M \omega$ n-формы ω по многообразию n.

Задача 2. Докажите, что в случае $M = [p, q]$ $\int_p^q a(x)\,dx = \int_p^q a(x)\,dx$ (т.е. обозначение корректно).

Задача 3. Пусть U — диффеоморфизм многообразия M. Докажите, что $\int_M U^*\omega = \pm \int_M \omega$, где берется знак $+$, если U сохраняет ориентацию, и знак $-$, если меняет.

Задача 4. Пусть $U : S^1 \to S^1$ — отображение, заданное формулой $U(z) = z^n$. Докажите, что $\int_{S^1} U^*\omega = n \int_{S^1} \omega$, где ω — произвольная 1-форма на S^1.

Задача 5. Вычислите $\int_{S^2} U^*\omega$, где $\omega = dx \wedge dy$ — форма в $\mathbb{R}^3$, и $U : S^2 \to \mathbb{R}^3$ — вложение единичной сферы.