В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, осенний семестр 1997 г.

1 Лекция 10

В последнее время мы занимались вычислением когомологий пространств $P_d \setminus \Sigma_k$. Ответ получили такой: когомологии равны $\mathbf{Z}$ в размерностях $0, (k-2), 2(k-2), \ldots, [d/k](k-2)$, в остальных размерностях когомологии нулевые.

Следующая задача — вопрос о стабилизации этих групп. При $d' > d$ имеется отображение

$$H^*(P_d \setminus \Sigma_k) \leftarrow H^*(P_{d'} \setminus \Sigma_k). \tag{1}$$

Задача состоит в том, чтобы выяснить, как устроено это отображение. Ответ нетрудно угадать.

Теорема 1 *Это отображение — изоморфизм во всех размерностях от 0 до $[d/k](k-2)$, а дальше отображение нулевое.*

Напомню, как устроено отображение когомологий. Оно индуцировано следующим вложением. В $P_{d'}$ имеется страт $\check{\Sigma}_d$, состоящий из полиномов, столь же вырожденных, как самая сложная функция $x^d \in P_d$, то есть имеющих ровно один корень кратности ровно d и не имеющих никаких других кратных корней. Рассмотрим в $P_{d'}$ шаровую окрестность U_ε любого такого полинома $\alpha \in \check{\Sigma}_d$. Имеется гомеоморфизм пар

$$(U_\varepsilon, U_\varepsilon \bigcap \Sigma_k) \sim (P_d, \Sigma_k) \times \mathbf{R}^{d'-d}. \tag{2}$$

Отождествим P_d с плоскостью $P_d \times \mathbf{R}^{d'-d}$ из правой части этого равенства и получим вложение P_d в U_ε — отождествление с некоторым трансверсальным срезом страта $\Sigma_d \subset P_{d'}$ в его неособой точке. При этом $\Sigma_k(d) \subset P_d$ переходит в $\Sigma_k(d') \subset P_{d'}$. В частности, получаем вложение

$$(P_d \setminus \Sigma_k(d)) \hookrightarrow (P_{d'} \setminus \Sigma_k(d')).$$

Чтобы вычислить встречное отображение в когомологиях, нужно пройти весь путь вычисления когомологий.

Воспользуемся сначала двойственностью Александера, а затем воспользуемся равенством (2) и простейшим вариантом формулы Кюннета для групп $\bar{H}_n$, гомологий с замкнутыми носителями, а именно: $\bar{H}_n(X \times \mathbf{R}^m) \simeq \bar{H}_{n-m}(X)$. В результате получим диаграмму отображений

$$\begin{array}{ccc}
H^i(P_d \setminus \Sigma_k(d)) & \longleftarrow & H^i(P_{d'} \setminus \Sigma_k(d')) \\
\simeq \updownarrow & & \simeq \updownarrow \\
\bar{H}_{d-i-1}(\Sigma_k(d)) & & \bar{H}_{d'-i-1}(\Sigma_k(d')) \\
\simeq \updownarrow & \overset{\varphi}{\swarrow} & \\
\bar{H}_{d'-i-1}(\Sigma_k(d') \bigcap U_\varepsilon) & &
\end{array}$$

Здесь верхняя горизонтальная стрелка — это отображение (1), которое мы вычисляем, две верхние вертикальные стрелки — изоморфизмы Александера в P_d и $P_{d'}$, левая нижняя вертикальная стрелка — только что упомянутая формула Кюннета в сочетании с гомеоморфизмом $U_\varepsilon \bigcap \Sigma_k \sim \Sigma_k \times \mathbf{R}^{d'-d}$ из формулы (2). Гомоморфизм φ задается отображением факторизации по дополнению к окрестности U_ε,

$$\overline{\Sigma_k(d')} \to \overline{\Sigma_k(d')}/\left(\overline{\Sigma_k(d')} \setminus U_\varepsilon\right) \sim \overline{\Sigma_k(d') \bigcap U_\varepsilon}.$$

Из определения двойственности Александера получается, что диаграмма коммутативна. Поэтому для того, чтобы вычислить отображение (1), остается вычислить отображение φ.

Мы делали симплициальное разрешение $\overline{\sigma_k(d)}$ пространства $\overline{\Sigma_k(d)}$, это — фильтрованное пространство $\bar F_0 \subset \bar F_1 \subset \cdots \bar F_{[d/k]} = \overline{\sigma_k(d)}$ При этом $\bar F_1$ — одноточечная компактификация открытого диска F_1 размерности $d-k+1$, то есть сфера размерности $d-k+1$. Затем, при переходе к $\bar F_2$, к этой сфере приклеивается клетка меньшей размерности $d-2(k-2)-1$. В результате может получиться лишь нечто, гомотопически эквивалентное букету двух сфер таких размерностей. То же самое происходит и дальше, и окончательно получаем, что $\overline{\sigma_k(d)}$ гомотопически эквивалентно букету $[d/k]$ сфер размерностей $d-p(k-2)-1$, $p = 1, 2, \ldots, [d/k]$.

Аналогично, пространство $\overline{\Sigma_k(d')}$ (и его симплициальное разрешение $\overline{\sigma_k(d')}$) гомотопически эквивалентны букету сфер размерностей $d'-p(k-2)-1$, $p = 1, \ldots, [d'/k]$.

Процедуру разрешения множества $\bar\Sigma_k(d')$ можно ограничить на его пересечение с окрестностью $U_\varepsilon \subset P_{d'}$. Эта процедура выдерживает умножение на прямое слагаемое $\mathbf{R}^{d'-d}$, то есть гомеоморфизм $(\Sigma_k(d') \bigcap U_\varepsilon) \sim \Sigma_k(d) \times \mathbf{R}^{d'-d}$, вытекающий из формулы (2), поднимается до гомеоморфизма

$$(\sigma_k(d') \bigcap \pi^{-1}(U_\varepsilon)) \sim \sigma_k(d) \times \mathbf{R}^{d'-d}. \tag{3}$$

Поэтому вместо отображения φ можно изучать соответствующее отображение симплициальных разрешений, то есть верхнюю строку коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\bar H_{d'-i-1}(\sigma_k(d') \bigcap \pi^{-1}(U_\varepsilon)) & \longleftarrow & \bar H_{d'-i-1}(\sigma_k(d')) \\
\simeq \updownarrow & & \simeq \updownarrow \\
\bar H_{d'-i-1}(\Sigma_k(d') \bigcap U_\varepsilon) & \stackrel{\varphi}{\longleftarrow} & \bar H_{d'-i-1}(\Sigma_k(d'))
\end{array}$$

Гомеоморфизм (3) уважает фильтрацию. А именно, на множестве $\sigma_k(d') \bigcap \pi^{-1}(U_\varepsilon)$ есть фильтрация, индуцированная из $\sigma_k(d')$ и фильтрация как фильтрованного множества $\sigma_k(d)$, умноженного на $\mathbf{R}^{d'-d}$. Это — одна и та же фильтрация.

Получаем отображение гомологических спектральных последовательностей для $\sigma_k(d) \times \mathbf{R}^{d'-d}$ и $\sigma_k(d')$. В начальных полосах (при $p \le [d/k]$) их группы $E^1_{p,q}$ изоморфны как алгебраические объекты. Остается доказать, что изоморфизм между ними задается уже гомоморфизмом наших спектральных последовательностей. При любом p это отображение групп $E^1_{p,q} = \bar H_{p+q}(F_p \setminus F_{p-1})$ задается факторизацией по прообразу дополнения к U_ε,

$$\bar H_*((F_p \setminus F_{p-1})(\sigma_k(d'))) \to \bar H_*\left((F_p \setminus F_{p-1})\left(\sigma_k(d') \bigcap \pi^{-1}(U_\varepsilon)\right)\right). \tag{4}$$

Но $(F_p \setminus F_{p-1})(\sigma_k(d'))$ — открытый шар размерности $d'-p(k-2)-1$, а $(F_p \setminus F_{p-1})\left(\sigma_k(d') \bigcap \pi^{-1}(U_\varepsilon)\right)$ — его открытое подмножество, также гомеоморфное шару. Поэтому отображение (4) не может быть ничем иным, как изоморфизмом если оба множества непусты (то есть при $p \le [d/k]$) и тривиально в ином случае.

В итоге получаем, что отображение (1) не зависит от выбора трансверсального среза страта $\Sigma_d(d')$, то есть вложения $P_d \hookrightarrow P_{d'}$, участвующего в построении этого отображения.

Теорема 1 позволяет нам определить стабильную группу когомологий дополнений к множествам $\Sigma_k(d) \subset P_d$ при $d \to \infty$ как обратный предел $\varprojlim H^*(P_d \setminus \Sigma_k)$ относительно всех отображений (1). Она имеет группы $\mathbf{Z}$ в всех размерностях, кратных $d-2$, и 0 во всех остальных размерностях.

Теперь прояснился смысл сделанного нами формального перехода к $E_r^{p,q} \cong E^r_{-p,d-q-1}$: эти когомологические спектральные последовательности (определявшиеся для каждого d) с ростом d стабилизируются к некоторой общей спектральной последовательности, вычисляющей эту стабильную группу.

Абстракция перехода к пределу имеет очень простую реализацию. А именно, можно рассмотреть пространство

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1 | f \in C^\infty \quad \text{и} \quad f \equiv 1 \quad \text{на бесконечности}\}.$$

В $\mathcal{F}$ можно определить подмножество $\Sigma_k = \{f | \exists x : f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(k-1)}(x) = 0\}$.

Теорема 2 *Группа* $\varprojlim H^*(P_d \setminus \Sigma_k)$ *изоморфна* $H^*(\mathcal{F} \setminus \Sigma_k)$.

В результате получается, что наша стабильная спектральная последовательность вычисляет когомологии не какого-то абстрактного предела, а естественного топологического пространства $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$.

Эта теорема доказывается с помощью теоремы Вейерштрасса о том, что функцию $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ класса C^k можно равномерно приблизить полиномами на компакте со всеми k производными. Основное утверждение таково. Для любого класса гомологий $\alpha \in H_i(\mathcal{F} \setminus \Sigma_k)$ существует целое число $d(\alpha)$, для которого α лежит в образе очевидного отображения

$$H_*(P_{d(\alpha)} \setminus \Sigma_k) \to H_*(\mathcal{F} \setminus \Sigma_k)$$

(сглаживание полиномов на бесконечности). Действительно, сингулярный цикл α в $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ можно рассматривать как отображение $a : \Delta \to \mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ некоторого полиэдра $\Delta \subset \mathbf{R}^n$, не имеющего границы. Этот полиэдр заключен в некотором замкнутом шаре $B^n \subset \mathbf{R}^n$. Продолжим отображение a до непрерывного отображения $a : B^n \to \mathcal{F}$. Это отображение можно рассматривать как непрерывное отображение $F : (B^n \times \mathbf{R}^1) \to \mathbf{R}$, такое что для любого $b \in B^n$ ограничение F на прямую $b \times \mathbf{R}^1$ принадлежит классу $\mathcal{F}$, более того, а) существует равномерная константа C такая что $F(b \times x) \equiv 1$ при $|x| \ge C$ и любом $b \in B^n$, б) все производные $\frac{\partial^r F}{\partial x^r}(b, x)$ непрерывно зависят от $b \in B^n$.

Такое отображение можно аппроксимировать гладким отображением $\tilde{F}$, также удовлетворяющим условию а), все производные $\frac{\partial^r F}{\partial x^r}(b, x)$, $r = 0, \ldots, k$ которого сколь угодно близки к аналогичным производным F. Тогда его ограничение на полиэдр Δ вновь будет циклом в $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$, гомологичным циклу α. Затем, пользуясь теоремой Вейерштрасса, приблизим $\tilde{F}$ полиномом $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}$, то есть семейством полиномов $\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}$, зависящим от параметра $b \in \mathbf{R}^n \supset B^n$.

Проблема состоит в том, что теорема Вейерштрасса позволяет приближать функции только на компактах, например, в нашем случае на компакте $B^n \times [-C, C]$, но получающиеся при этом полиномы вообще говоря могут очень плохо вести себя вдали от этого компакта, в частности нет гарантии, что их ограничения на прямые $b \times \mathbf{R}^1$ не будут иметь лишних k-кратных корней. Чтобы справиться с этой проблемой, поступаем следующим образом. Пользуясь растяжениями прямой $\mathbf{R}^1 \ni x$, без ограничения общности можем считать, что $C = 1/2$. Затем, пользуясь теоремой Вейерштрасса, приближаем функцию $\tilde{F}$ сколь угодно хорошо на компакте $B^n \times [-2, 2]$ некоторым полиномом $\Pi(b, x)$. Затем положим $\tilde{\Pi}(b, x) \equiv \Pi(b, x) + x^{2N}$, где N очень велико. Тогда для любого $b \in B^n$ функция $\tilde{\Pi}(b \times \mathbf{R}^1)$ положительна в области где $|x| \geq C = 1/2$: при $|x| \in [1/2, 2]$ это следует из того, что обе функции $\Pi(b, \cdot)$ и x^{2N} там положительны, а при $|x| \geq 2$ — из того, что там все определяется мономом x^{2N}. Наконец, в области где $|x| \leq 1/2$ этот моном очень мал, и наша функция $\tilde{\Pi}$ вновь является очень хорошей аппроксимацией функции $\tilde{F}$.

В нашем случае группа $H^*(P_d \setminus \Sigma_k)$ может только расти с ростом d, поэтому доказывать больше ничего не нужно. Но в общем случае, когда когомологии бесконечномерного пространства вычисляются с помощью последовательности конечномерных аппроксимаций, нужно проверять две вещи. Первое: любой цикл можно реализовать уже в каком-то конечномерном аппроксимирующем пространстве. (Это мы уже сделали). Второе: если на каком-то шаге есть два класса гомологий соответствующего конечномерного пространства, которые гомологичны внутри бесконечномерного пространства, то они гомологичны внутри какой-то следующей конечномерной аппроксимации. В нашем случае второе очевидно, а в общей ситуации это обычно доказывается очень похожим образом, также с помощью теоремы Вейерштрасса.

С тем же успехом мы могли бы вычислять когомологии множества недискриминантных элементов пространства $P(d, k)$ — множества систем из k полиномов степени d :

$$\begin{cases} x^d + a_1^1 x^{d-1} + \cdots + a_1^d \\ \qquad \qquad \dots \\ x^d + a_k^1 x^{d-1} + \cdots + a_k^d \end{cases}$$

В этом случае в качестве дискриминанта рассмотрим *результантное множество* $\Sigma(d, k)$ (множество систем, имеющих общий корень).

Задача 1 *Вычислить* $H^*(P(d, k) \setminus \Sigma(d, k))$ *при* $k \geq 2$.

Задача 2 *Вычислить* $\varprojlim H^*(P(d, k) \setminus \Sigma(d, k))$ *при* $k \geq 3$.

Задача 3 *Найти топологическое функциональное пространство* Φ, *когомологии которого являются воплощением этого обратного предела.*

Задача 4 *Сравнить ответ с предыдущим результатом про* $H^*(\mathcal{F} \setminus \Sigma_k)$.

Задача 5 *Какой из этого можно сделать вывод о сравнении пространств* $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ *и* $\Phi \setminus \Sigma(\infty, k)$*?*

Когда мы всё это сделаем, окажется, что мы находимся в рамках следующей теории.

Исчисление струй и теоремы Смейла — Хирша