Определим переменную K^* соотношением

$$\operatorname{th} K^* = e^{-2K}. \tag{3.6}$$

У соотношения (3.6) есть более симметричная форма, которая ясно показывает симметрию этого соотношения относительно замены K на K^* и наоборот:

$$\operatorname{sh} 2K^* \operatorname{sh} 2K = 1. \tag{3.7}$$

В дальнейшем мы всегда будем считать, что величины K и K^* связаны соотношением (3.7). Теперь можно исключить Φ из (3.5) и написать соотношение, связывающее свободные энергии при высокой и низкой температуре (если K велико, то K^* мало):

$$\psi(K^*) = \psi(K) + 2K - \ln(2\operatorname{ch}^2 K^*). \tag{3.8}$$

В критической точке свободная энергия является неаналитической функцией T, а следовательно, и K. Допустим, что при $K = K_c$ имеется критическая точка, но тогда при $K^* = K_c$ ψ также будет неаналитична. Если мы предположим, что существует лишь одна критическая точка, то $K = K^*$. Из (3.8) получаем уравнение для критической точки:

$$2K = \ln(2\operatorname{ch}^2 K),$$

которое тоже можно переписать в симметричной форме:

$$\operatorname{sh}^2 2K_c = 1.$$

2. Модель Изинга

Решение Вдовиченко

В настоящее время не существует ни одного решения двумерной модели Изинга с магнитным полем, отличным от нуля. Тем не менее, эта модель содержит важные предпосылки, оправдывающие ее использование в качестве модели магнетика, а именно ненулевые короткодействующие взаимодействия и наличие критической точки.

В этом разделе мы приводим решение двумерной модели Изинга в отсутствие магнитного поля, принадлежащее Вдовиченко. Из существующих решений оно, по-видимому, наиболее простое. Суть его

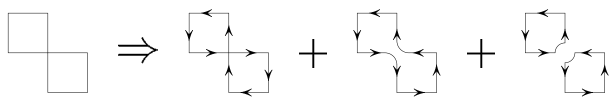

Рис. 3.9.

заключается в сведении статистической суммы в высокотемпературном приближении,

$$Z_N = (\mathrm{ch}^2\ K)^M 2^N \sum_C \kappa^{l(C)}, \quad \kappa = \mathrm{th}\, K, \tag{3.9}$$

к спектру некоторого бесконечного оператора, который легко вычисляется.

В статсумме (3.9) суммирование ведется по замкнутым контурам C на решетке $\mathcal{L}$, то есть таким подмножествам ребер $\mathcal{L}$, у которых в каждом узле сходится четное число ребер. Используя это обстоятельство, можно ввести более удобное графическое представление для (3.9).

Пусть по решетке $\mathcal{L}$ блуждает частица, оставляя за собой след. Рассматриваем только замкнутые траектории частицы, представляющие из себя совокупность одной или нескольких замкнутых петель. Единственным ограничением, которое мы накладываем, является отсутствие «клювов» — таких участков пути, на которых частица проходит какое-то ребро и тут же возвращается обратно.

Замкнутому контуру C на решетке $\mathcal{L}$ (не обязательно связному) можно поставить в соответствие такие траектории частицы, от которых остается след в виде этого контура. Для контуров с самопересечениями такое представление неоднозначно. Например, контуру на рис. 3.9 можно сопоставить три разные пути частицы: одна или две петли без самопересечений и одна петля с самопересечением. Пути не различаются ориентацией или последовательностью прохождения перекрестков. Важен лишь качественный характер пути (который остается, когда точка начинает двигаться не строго по линиям сетки и срезать углы).

Пусть $l(\Gamma)$ — длина пути Γ. Сумму по контурам на решетке

$$\Sigma = \sum_C \kappa^{l(C)}$$

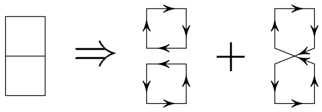

Рис. 3.10.

можно выразить через сумму по всевозможным путям чернильной точки, если для каждого пути ввести множитель $(-1)^{\nu}$, где $\nu = \nu(\Gamma)$ — число самопересечений данного пути:

$$\Sigma = \sum_{\Gamma} (-1)^{\nu(\Gamma)} \kappa^{l(\Gamma)}. \tag{3.10}$$

Заметим, что в правой части (3.10) фигурируют члены, не соответствующие никаким кривым в исходной сумме.

Но фактически они выпадают из суммы: при построении соответствующих такому графику петель получающиеся совокупности войдут в сумму с противоположными знаками и взаимно сократятся.

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть γ — связная замкнутая петля на плоскости, имеющая ν точек самопересечения, а полный угол поворота касательной при обходе γ равен $2\pi(n+1)$. Тогда

$$(-1)^n = (-1)^{\nu}.$$

Сопоставим каждому узлу, через который проходит траектория, множитель $e^{i\varphi/2}$, где φ — угол поворота касательной в нем ($\varphi = 0, \pm\pi/2$). Тогда после обхода петли полный множитель будет равным $(-1)^{\nu+1}$. Если же путь несвязный, то в результате мы получаем множитель $(-1)^{m+s}$, где s — число компонент, а $m = \sum \nu$.

Таким образом, вместо того, чтобы учитывать число пересечений, можно каждый узел в петле брать с весом $e^{i\varphi/2}$, а для всего пути ввести еще множитель $(-1)^s$:

$$\Sigma = \sum_{\Gamma} (-1)^{s(\Gamma)} \prod_{x\in\Gamma} e^{i\varphi_x/2} \kappa^{l(\Gamma)}.$$

Обозначим через $F_l^{(1)} \equiv F_l$ сумму по всем одиночным петлям длины l, причем каждая петля входит с множителем $e^{i\varphi_x/2}$ на каждый узел в ней:

$$F_l^{(1)} = \sum_{l(\Gamma)=l} \prod_{x\in\Gamma} e^{i\varphi_x/2}.$$

Тогда для аналогичной суммы $F_l^{(2)}$ по путям, имеющим две компоненты связности, будем иметь

$$F_l^{(2)} = \frac{1}{2!} \sum_{l_1+l_2=l} F_{l_1}^{(1)} F_{l_2}^{(1)}.$$

Тонким местом в этом утверждении является возможность совпадения участков компонент пути (рис. 3.10). Но такие вклады сокращаются путем, описанным выше.

Далее, для путей, имеющих s компонент связности, получим

$$F_l^{(s)} = \frac{1}{s!} \sum_{l_1+\ldots+l_s=l} F_{l_1}^{(1)} \ldots F_{l_s}^{(1)}.$$

В итоге сумма по всем петлям принимает вид (петли с числом узлов больше N не дают вклада в сумму, так как обязательно содержат повторяющиеся связи).

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{s!} \sum_{l_1,\ldots,l_s=1}^{\infty} \kappa^{l_1+\ldots+l_s} F_{l_1} \ldots F_{l_s} = \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{s!} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \kappa^l F_l \right)^s = \\
&= \exp\left(- \sum_{l=1}^{\infty} \kappa^l F_l \right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Как видно, для того чтобы вычислить Σ, необходимо и достаточно уметь вычислять F_l — сумму по всем одиночным петлям длины l.

Свяжем с каждым узлом решетки четыре возможные направления выхода из него, перенумеровав их специальным индексом ν (рис. 3.11). Через $W_L(n, m, \nu)$ обозначим сумму по связным путям длины L, соединяющим некоторый заданный узел $x_0 = (n_0, m_0, \nu_0)$ с узлом $x = (n, m, \nu)$. В этой сумме учитываются множители $e^{i\varphi/2}$ во всех узлах пути, начиная с узла, следующего за x_0 и кончая узлом x.

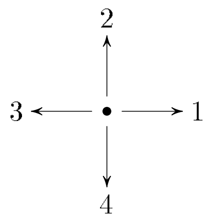

Рис. 3.11.

Угол φ_x есть изменение направления при переходе к следующей связи. Последний шаг, приводящий в узел n, m, ν, не должен происходить в направлении, противоположном ν.

В частности, $W_L(n_0, m_0, \nu_0)$ есть количество замкнутых путей длины L.

Искомая сумма F_l выражается через W_l следующим образом:

$$F_l = \frac{1}{2l} \sum_{x \in \mathcal{L}} \sum_{\mu=1}^{\infty} W_l(x, \mu | x, \mu) \tag{3.12}$$

Появление $2l$ в знаменателе объясняется тем, что каждая петля является элементом $2l$ различных сумм вида $W_l(x, \mu | x, \mu)$, а именно: x пробегает l узлов, и, кроме того, возможны два направления обхода петли.

Фиксируем некоторое начало траектории (x_0, μ_0). Тогда можно выразить суммы по путям длины $l+1$ через суммы по путям длины l:

$$\begin{aligned}
W_{l+1}(n, m, 1) &= W_l(n-1, m, 1) + e^{-i\pi/4} W_l(n, m-1, 2) + \\
&\quad + e^{i\pi/4} W_l(n, m+1, 4), \\
W_{l+1}(n, m, 2) &= e^{i\pi/4} W_l(n-1, m, 1) + W_l(n, m-1, 2) + \\
&\quad + e^{-i\pi/4} W_l(n+1, m, 3), \\
W_{l+1}(n, m, 3) &= e^{i\pi/4} W_l(n, m-1, 2) + W_l(n+1, m, 3) + \\
&\quad + e^{-i\pi/4} W_l(n, m+1, 4), \\
W_{l+1}(n, m, 4) &= e^{-i\pi/4} W_l(n-1, m, 1) + e^{i\pi/4} W_l(n+1, m, 3) + \\
&\quad + W_l(n, m+1, 4).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Вводя матрицу коэффициентов Λ, можно записать эту систему в виде

$$W_{l+1}(x,\mu)=\sum_{y,\eta}\Lambda(x,\mu|y,\eta)W_l(y,\eta). \tag{3.14}$$

Матричный элемент $\Lambda(x,\mu|y,\eta)$ равен нулю, если узлы x и y не являются соседними.

Λ не зависит от начала пути (x_0,μ_0). Следовательно, если мы рассмотрим матрицы $\mathcal{W}_l$ с элементами $W_l(x,\mu|x_0,\mu_0)$, то получим для них рекуррентную формулу, обобщающую (3.14):

$$\mathcal{W}_{l+1}=\Lambda\mathcal{W}_l.$$

Согласно формуле (3.12),

$$F_l=\frac{1}{2l}Tr\,\mathcal{W}_l=\frac{1}{2l}Tr\,\Lambda^l\mathcal{W}_0.$$

Поскольку $\mathcal{W}_0$ — единичная матрица, получим

$$F_l=\frac{1}{2l}Tr\,\Lambda^l=\frac{1}{2l}\sum_i(\lambda_i)^l,$$

где λ_i — собственные значения Λ.

Итак, F_l, а, следовательно, и сумма Σ, выражаются через собственные значения оператора, представленного матрицей Λ:

$$\begin{aligned}\Sigma&=\exp\left(-\sum_{l=1}^{\infty}\kappa^lF_l\right)=\exp\left(-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\kappa^l}{2l}\operatorname{Tr}\Lambda^l\right)=\\&=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_i\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(\kappa\lambda_i)^l}{l}\right)=\exp\left(\frac{1}{2}\sum_i\ln\left(1-\kappa\lambda_i\right)\right)=\\&=\prod_i\left(1-\kappa\lambda_i\right)^{1/2}=\left(\det(E-\kappa\Lambda)\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{3.15}$$

(здесь E — единичная матрица).

Для того, чтобы вычислить собственные значения Λ, перейдем к представлению Фурье (считаем, что решетка квадратная):

$$W_l(x,\mu) = \sum_p W_l(p,\mu) e^{2\pi i p x/\sqrt{N}}, \tag{3.16}$$

где $p = (p_1, p_2)$, $px = p_1 n + p_2 m$.

Подставляя разложение (3.16) в (3.13), получим систему рекуррентных соотношений на $W_l(p,\mu)$. Матрица этой системы имеет блочно-диагональный вид

$$\Lambda(p,\mu \mid q,\eta) = \delta_{p,q}\Lambda_p(\mu,\eta)$$

с блоками

$$\Lambda_p(\mu,\eta) = \begin{pmatrix} \beta^{p_1} & \alpha^{-1}\beta^{p_2} & 0 & \alpha\beta^{p_2} \\ \alpha\beta^{p_1} & \beta^{p_2} & \alpha^{-1}\beta^{-p_1} & 0 \\ 0 & \alpha\beta^{p_2} & \beta^{-p_1} & \alpha^{-1}\beta^{-p_2} \\ \alpha^{-1}\beta^{p_1} & 0 & \alpha\beta^{-p_1} & \beta^{-p_2} \end{pmatrix},$$

где обозначено $\alpha = e^{i\pi/4}$, $\beta = e^{2\pi i/\sqrt{N}}$.

Тогда оператор $E - \kappa\Lambda$ в этом представлении также имеет блочно-диагональный вид с блоками

$$\begin{pmatrix} 1-\kappa\beta^{p_1} & -\kappa\alpha^{-1}\beta^{p_2} & 0 & -\kappa\alpha\beta^{p_2} \\ -\kappa\alpha\beta^{p_1} & 1-\kappa\beta^{p_2} & -\kappa\alpha^{-1}\beta^{-p_1} & 0 \\ 0 & -\kappa\alpha\beta^{p_2} & 1-\kappa\beta^{-p_1} & -\kappa\alpha^{-1}\beta^{-p_2} \\ -\kappa\alpha^{-1}\beta^{p_1} & 0 & -\kappa\alpha\beta^{-p_1} & 1-\kappa\beta^{-p_2} \end{pmatrix}.$$

Определитель оператора $E - \kappa\Lambda$ есть произведение определителей составляющих его блоков. Поэтому

$$\Sigma = \prod_p D_p^{1/2},$$

где

$$D_p = (1+\kappa^2)^2 - 2\kappa(1-\kappa^2)\left(\cos\frac{2\pi p_1}{\sqrt{N}} + \cos\frac{2\pi p_2}{\sqrt{N}}\right).$$

В итоге для статсуммы получается формула

$$Z_N = (2\,\mathrm{ch}^2\ K)^N \prod_p D_p^{1/2}.$$

Тогда свободная энергия на узел решетки есть

$$f = -T \lim_{N\to\infty} \frac{\ln Z_N}{N} = \\ = -T \lim_{N\to\infty} \left(\ln\left(2\operatorname{ch}^2 K\right) + \frac{1}{2N}\sum_p \ln D_p \right).$$

В термодинамическом пределе сумма по импульсам переходит в интеграл. Для того, чтобы осуществить этот переход, мы вводим переменные

$$w_1 = \frac{2\pi p_1}{\sqrt{N}}, \qquad w_2 = \frac{2\pi p_2}{\sqrt{N}}$$

так, что выполняется следующее соотношение на элемент объема:

$$1 = dp_1 dp_2 = \frac{N}{(2\pi)^2} dw_1 dw_2$$

(в пределе w_1, w_2 — непрерывные переменные, меняющиеся от нуля до 2π).

В новых переменных выражение для D_p имеет вид

$$D_p = (\kappa^2 + 2\kappa - 1)^2 + 4\kappa(1-\kappa^2)\left(\sin^2\frac{w_1}{2} + \sin^2\frac{w_2}{2}\right).$$

Кроме того, вспомним, что $\kappa = \operatorname{th} K$ и, следовательно,

$$-\ln(2\operatorname{ch}^2 K) = \ln\left(\frac{1-\kappa^2}{2}\right).$$

Окончательно, для свободной энергии получаем формулу

$$f = T\ln\left(\frac{1-\kappa^2}{2}\right) - \frac{T}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\Big((\kappa^2+2\kappa-1)^2 + \\ + 4\kappa(1-\kappa^2)\left(\sin^2\frac{w_1}{2} + \sin^2\frac{w_2}{2}\right)\Big)\, dw_1 dw_2. \tag{3.17}$$

Функция $f(T)$ может иметь особую точку только при условии, что величина

$$(\kappa^2 + 2\kappa - 1)^2 + 4\kappa(1-\kappa^2)\left(\sin^2\frac{w_1}{2} + \sin^2\frac{w_2}{2}\right)$$

обращается в нуль в некоторой точке области интегрирования Минимальное значение этого выражения как функции от w_1, w_2 есть

$$(\kappa^2 + 2\kappa - 1)^2. \tag{3.18}$$

Оно достигается при $\sin(w_1/2) = \sin(w_2/2) = 0$.

Выражение (3.18) имеет минимум, в котором оно обращается в нуль лишь при одном (положительном) значении $\kappa = \kappa_c = \sqrt{2} - 1$. Соответствующая температура и является точкой фазового перехода.

В интеграле (3.17) неаналитичность имеет только интеграл, основной вклад в который вносит окрестность $w_{1,2} = 0$. Поэтому

$$f = g(\varepsilon) - \frac{T}{8\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln(c\varepsilon^2 + A(\varepsilon)(w_1^2 + w_2^2))\, dw_1 dw_2,$$

где $\varepsilon = \kappa - \kappa_c$, а функция $g(\varepsilon)$ аналитична при $\varepsilon = 0$. Можно произвести интегрирование по w_i и получить, что

$$f \approx g_1(\varepsilon) + c\varepsilon^2 \ln(\varepsilon).$$

В результате находим поведение теплоемкости при $T - T_c \ll T_c$:

$$C \propto \ln(T - T_c).$$

Решение Кауфман

Здесь мы приводим еще одно точное решение двумерной модели Изинга, принадлежащее Брурии Кауфман, ученице Онсагера.

Как и раньше, рассмотрим прямоугольную решетку $\mathcal{L}$, n — количество узлов в одной строке, m — количество строк. Наложим на решетку тороидальные граничные условия, то есть будем считать, что m-я строка взаимодействует с первой строкой, а n-й столбец — с первым столбцом.

Чтобы полностью определить состояние, нужно задать значение спина в каждом узле. Однако, для наших целей вместо узлов удобнее рассматривать сразу целые строки, а именно, мы будем определять состояние как совокупность m (по числу строк) наборов $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$, где ν_j определяется конфигурацией спинов в j-й строке. Поскольку каждая строка содержит n спинов, ν_j, $j = 1, ..., m$, могут принимать 2^n различных значений.

Энергию взаимодействия спинов в i-й строке обозначим символом $E(\nu_i)$, а энергию взаимодействия i-й и $(i+1)$-й строк — символом $E(\nu_i, \nu_{i+1})$. Тогда полная энергия системы дается выражением

$$E = \sum_{i=1}^{m} E(\nu_i) + \sum_{i=1}^{m} E(\nu_i, \nu_{i+1}),$$

а статсумма

$$Z = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m} \prod_{i=1}^{m} \exp\left(-\frac{E(\nu_i)}{T}\right) \exp\left(-\frac{E(\nu_i, \nu_{i+1})}{T}\right).$$

Если мы введем матрицы V_1 и V_2 с элементами

$$\begin{aligned} (V_1)_{\nu_i \nu_{i+1}} &\equiv \exp\left(-E(\nu_i, \nu_{i+1})/T\right), \\ (V_2)_{\nu_i \nu_{i+1}} &\equiv \exp\left(-E(\nu_i)/T\right) \delta_{\nu_i \nu_{i+1}}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

то статсумму, как легко видеть, можно записать в виде

$$Z = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m} (V_2V_1)_{\nu_1\nu_2} (V_2V_3)_{\nu_2\nu_3} \cdots (V_2V_1)_{\nu_m\nu_1} \equiv tr(V_2V_1)^m.$$

Матрица $T = V_2V_1$ является матрицей $2^n \times 2^n$ и называется *трансфер-матрицей.*

Наша задача, как и для одномерного случая (лекция 23), свелась к нахождению собственных значений трансфер-матрицы, поскольку

$$Z = tr\, T^m = \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i^m$$

где λ_i — собственные значения T.

Рассмотрим 2^n-мерное пространство $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots H_n$, где каждое H_i — двумерное пространство с фиксированным базисом

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы из H будем обозначать $\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где каждая переменная σ_i может принимать два значения ± 1.

Введем операторы s_i и C_i:

$$s_i\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n) = \sigma_i\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n)$$
$$C_i\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n) = \psi(\sigma_1, \ldots, -\sigma_i, \ldots, \sigma_n).$$

Следующие свойства введенных операторов очевидны:

1) $s_i^2 = C_i^2 = 1, \quad s_iC_i = -C_is_i, i = 1, \ldots, n;$
2) $s_is_j = s_js_i, C_iC_j = C_jC_i, s_iC_j = C_js_i, i, j = 1, \ldots, n, i \neq j.$

Легко видеть, что s_i и C_i, действующие на H, можно представить в виде

$$s_i = 1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes s \otimes \ldots \otimes 1,$$
$$C_i = 1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes C \otimes \ldots \otimes 1,$$

где операторы s, C действуют на σ_i и задаются матрицами 2×2:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы s_i, C_i обладают следующими легко проверяемыми свойствами:

1) s_is_j диагонален для любых i, j;
2) s_is_{i+1} и s_js_{j+1} коммутируют для любых i, j;
3) $\exp\left(a \sum s_is_{i+1}\right) = \prod \exp\left(as_is_{i+1}\right)$, где a — произвольная константа;
4) $\exp(as_is_{i+1})\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \exp(a\sigma_i\sigma_{i+1})\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$;
5) C_i и C_j коммутируют для любых i, j;
6) $\exp(a \sum C_i) = \prod \exp(aC_i)$, где a — произвольная константа.

Отсюда следует, что матрицу V_2 можно записать, используя s_i и C_i:

$$V_2 = \exp\left(K' \sum_{i=1}^{n} s_is_{i+1}\right),$$

где K' — горизонтальная константа связи.

Чтобы выразить через s_i, C_i также и V_1, поступим следующим образом. Экспоненту $e^{K\sigma_i\sigma'_i}$, где K — вертикальная константа связи, для каждого i можно рассматривать как элемент матрицы $M = \begin{pmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{pmatrix}$, действующей на H_i. Попробуем подобрать константы A, K^* такие, что $M = Ae^{K^*C}$, где C — определенная выше матрица. Тогда

$$M = \begin{pmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{pmatrix} = e^K I + e^{-K} I =$$
$$= Ae^{K^*C} = A(\operatorname{ch} K^*)I + A(\operatorname{sh} K^*)I,$$

где I — единичная матрица.

Получаем систему

$$A \operatorname{ch} K^* = e^K, \qquad A \operatorname{sh} K^* = e^{-K},$$

откуда следует, что $A = (2\operatorname{sh} 2K)^{1/2}$, $\operatorname{th} K^* = e^{-2K}$. (Напомним, что последнее соотношение можно переписать в более симметричном виде $\operatorname{sh} 2K \operatorname{sh} 2K^* = 1$.)

Итак, V_1 можно записать в виде

$$V_1 = (2\operatorname{sh} 2K)^{n/2} \exp\left(K^* \sum_{i=1}^{n} C_i\right).$$

Для удобства переопределим V_1 следующим образом:

$$V_1 = \exp\left(K^* \sum_{i=1}^{n} C_i\right),$$

то есть избавимся от множителя, стоящего перед экспонентой. Тогда статсумма приобретет следующий вид

$$Z = (2\operatorname{sh} 2K)^{mn/2} \operatorname{Tr}(V_2 V_1)^m.$$

Теперь наша задача — диагонализовать $T = V_2V_1$ и найти все собственные значения. Для этого мы покажем, что матрицы вида $\exp(as_is_{i+1})$, $\exp(bC_i)$ и их произведения образуют 2^n-мерное представление группы вращений $O(2n)$. Тогда V будет являться представлением некоторого элемента этой группы.

Оказывается, существует прямая связь между собственными значениями операторов поворотов из $O(2n)$ и собственными значениями матриц, реализующих их 2^n-мерное представление. Нахождение же собственных значений $2n$-мерных поворотов — это уже довольно простая задача.

Итак, мы должны показать, что матрицы V_1, V_2 — это спинорное представление матриц R_1, R_2 из $O(2n)$, и найти эти матрицы.

Мы начнем наше доказательство с построения алгебры с образующими $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{2n}\}$, удовлетворяющими следующим соотношениям

$$\Gamma_k^2 = 1, \quad \Gamma_k\Gamma_l = -\Gamma_l\Gamma_k, \quad (1 \leqslant k, l \leqslant 2n). \tag{3.20}$$

Алгебра с такими образующими называется *алгеброй Клиффорда*.

Легко построить матричную реализацию алгебры Клиффорда. Например, для $n = 1$ один из способов сделать это такой: $\Gamma_1 = s$, $\Gamma_2 = isC$. Как легко видеть, Γ_1, Γ_2 являются генераторами набора матриц Паули, то есть все матрицы Паули могут быть получены посредством перемножения Γ_1, Γ_2 в разных комбинациях: $\sigma_x = i\Gamma_2\Gamma_1$, $\sigma_y = -\Gamma_2, \sigma_z = \Gamma_1$.

Для $n = 2$ одна из возможных реализаций алгебры Клиффорда задается набором генераторов матриц Дирака:

$$\Gamma_1 = s \otimes 1, \quad \Gamma_2 = isC \otimes 1, \quad \Gamma_3 = C \otimes s, \quad \Gamma_4 = C \otimes isC.$$

В общем случае мы можем выбрать следующую реализацию:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2k-1} &\equiv C \otimes C \otimes \ldots \otimes s \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots \equiv P_k, \\ \Gamma_{2k} &\equiv C \otimes C \otimes \ldots \otimes isC \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots \equiv Q_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Здесь каждое прямое произведение содержит n сомножителей. Поэтому Γ_k — 2^n-мерные матрицы.

Если мы составим всевозможные призведения Γ_k, то мы получим набор из 2^n «базисных» матриц:

$$1, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{2n}, \Gamma_1\Gamma_2, \Gamma_1\Gamma_3, \ldots, \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3, \ldots$$

Теперь любая 2^n-мерная матрица может быть записана в виде линейной комбинации «базисных».

В частности, V_1 и V_2 легко выражаются через них. Имеем:

$$C_k = -iP_kQ_k = 1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes C \otimes 1 \otimes \ldots,$$
$$s_k = C_1C_2 \ldots C_{k-1}P_k = 1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes s \otimes 1 \otimes \ldots.$$

Поэтому

$$V_1 = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-iK^*P_kQ_k\right).$$

С другой стороны, поскольку

$$s_{k+1}s_k = iP_{k+1}Q_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$
$$s_1s_n = -iP_1Q_nC_1C_2\ldots C_n \equiv -iP_1Q_n \cdot U,$$

где $U = C \otimes C \otimes \ldots \otimes C$, мы можем заключить, что

$$V_2 = \prod_{i=1}^{n-1} \exp(iK'P_{k+1}Q_k) \cdot \exp(-iK'P_1Q_nU).$$

Заметьте, что V_2 можно получить из V_1, делая замену $Q_k \to P_{k+1}$, $P_k \to Q_k$, $K^* \leftrightarrow K'$ (за исключением последнего множителя в V_2). Такое преобразование (в 2^n-мерном пространстве) является основной операцией спинорного анализа и, как будет вскоре показано, по существу есть преобразование эквивалентности в 2^n измерениях.

Кроме (3.21), нам понадобится еще одна реализация алгебры Клиффорда. Ясно, что коммутационные соотношения

$$\Gamma_k\Gamma_l + \Gamma_l\Gamma_k = 2\delta_{kl}$$

инвариантны относительно преобразования эквивалентности в 2^n-мерном пространстве. Пусть $\Gamma_k^* = S\Gamma_kS^{-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Тогда

$$\Gamma_k^*\Gamma_l^* + \Gamma_l^*\Gamma_k^* = 2\delta_{kl}.$$

Мы видим, что набор Γ_k^* является другой матричной реализацией алгебры Клиффорда. Например, набор

$$\begin{aligned} \Gamma_{2k-1}^* &= s \otimes s \otimes \ldots \otimes C \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots \equiv P_k^*, \\ \Gamma_{2k}^* &= s \otimes s \otimes \ldots \otimes iCs \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots \equiv Q_k^*, \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \end{aligned} \tag{3.22}$$

удовлетворяет всем коммутационным соотношениям. Он получается из (3.21) посредством преобразования, взаимозаменяющее C и s во всех операторах. Вторая реализация алгебры Клиффорда очень часто бывает удобнее первой, поэтому мы время от времени будем ею пользоваться.

Заметьте, что в качестве матрицы преобразования эквивалентности здесь выступает матрица

$$g = 2^{n/2}(C+s) \otimes (C+s) \otimes \ldots \otimes (C+s) = g^{-1},$$

где

$$C + s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$gV_1g^{-1} = \prod_{i=1}^{n} \exp(-iK^* P_i^* Q_i^*),$$

то есть V_1 приобретает диагональный вид. В то же время gV_2g^{-1} таковым не обладает.

Перейдем теперь к изучению спинорного представления ортогональной группы. Оказывается, имеет место следующая

Теорема. Если два набора матриц, $\{\Gamma_k\}$ и $\{\Gamma_k^*\}$, удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Клиффорда, то обязательно существует преобразование S такое, что $\Gamma_k^* = S\Gamma_k S^{-1}$.

Будем рассматривать два набора матриц, получающихся друг из друга преобразованием эквивалентности, как один и тот же набор. Тогда мы можем сказать, что для данного n имеется только одна реализация алгебры Клиффорда. Доказательство этого утверждения основано на том факте, что автоморфизм полной матричной алгебры существует, единствен и дается соотношением эквивалентности.

Итак, пусть теперь у нас есть некоторая некоторая реализация алгебры Клиффорда Γ_k. Покажем, что определенные линейные комбинации Γ_k также удовлетворяют коммутационным соотношениям. Пусть линейная комбинация имеет вид

$$\Gamma_k^* = \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}\Gamma_j, \quad (1 \leqslant k \leqslant 2n),$$

где o_{jk} — пока произвольные числа, вообще говоря, комплексные. Тогда:

$$(\Gamma_k^*)^2 = \left(\sum_j o_{jk}\Gamma_j\right)^2 = \sum_{i,j} o_{ik}o_{jk}\Gamma_i\Gamma_j.$$

Для $i \neq j$ в силу коммутационных соотношений имеем: $o_{jk}o_{ik}\Gamma_j\Gamma_i + o_{ik}o_{jk}\Gamma_i\Gamma_j = 0$. Не сокращаются только члены с $i = j$. Поскольку $(\Gamma_i)^2 = 1$,

$$(\Gamma_k^*)^2 = \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^2.$$

Если мы теперь положим

$$\sum_{j=1}^{2n} o_{jk}^2 = 1,$$

то будет $(\Gamma_k^*)^2 = 1$. Аналогично, если мы потребуем, чтобы было

$$\sum_{j=1}^{2n} o_{jk}o_{jl} = 0, \qquad k \neq l \qquad (1 \leqslant k, l \leqslant 2n),$$

то получим $\Gamma_k^*\Gamma_l^* = -\Gamma_l^*\Gamma_k^*$. Таким образом, набор Γ_k^* является реализацией алгебры Клиффорда, если o_{jk} удовлетворяют соотношениям полноты:

$$\sum_{j=1}^{2n} o_{jk}o_{jl} = \delta_{kl} \qquad (1 \leqslant k \leqslant 2n).$$

Но, согласно теореме, Γ_k^* связана с Γ_k посредством преобразования эквивалентности:

$$\Gamma_k^* = S(o)\cdot\Gamma_k\cdot S(o)^{-1}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant 2n.$$

Мы пишем $S(o)$, поскольку хотим особо подчеркнуть тот факт, что преобразование эквивалентности зависит от ортогональной матрицы o.

Рассмотрим полную группу ортогональных матриц o в $2n$-пространстве. Мы сейчас покажем, что совокупность матриц $S(o)$ образует 2^n-мерное представление ортогональной группы. Иными словами, существует гомоморфизм $o \to S(o)$ такой, что произведению ортогональных матриц соответствует произведение их образов:

$$S(o'') = S(o' \cdot o) = S(o') \cdot S(o).$$

Пусть

$$o\colon \Gamma_k \to \sum_{j=1}^{2n} o_{jk}\Gamma_j = S(o)\Gamma_k S(o)^{-1},$$

$$o'\colon \Gamma_k \to \sum_{l=1}^{2n} o'_{lk}\Gamma_l = S(o')\Gamma_k S(o')^{-1}.$$

Тогда произведение двух операторов есть

$$o'' = o' \cdot o\colon \Gamma_k \to \sum_{l=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n} o_{jk}o'_{lj}\Gamma_l = \sum_{l=1}^{2n} o''_{lk}\Gamma_l = S(o'')\Gamma_k S(o'')^{-1}.$$

С другой стороны,

$$o' \cdot o\colon \Gamma_k \to S(o') \cdot S(o) \cdot \Gamma_k \cdot S(o)^{-1} \cdot S(o')^{-1}.$$

В результате мы видим, что

$$S(o' \cdot o) = S(o'') = S(o') \cdot S(o).$$

Таким образом, каждому вращению в $2n$ измерениях соответствует некоторое преобразование в 2^n-мерном «спиновом» пространстве. Например, вращение, приводящее к замене $Q_r \to P_{r+1}$, $P_r \to Q_r$ (и тем самым к $V_1 \to V_2$), имеет представление в спиновом пространстве:

$$V_2 = SV_1S^{-1}$$

(мы пренебрегли граничным членом в V_2).

Самыми простыми ортогональными преобразованиями являются плоские повороты. Но они порождают всю ортогональную группу. Естественно спросить, сопряжению на какой элемент в спиновом пространстве соответствует элементарный поворот на угол θ в плоскости, натянутой на Γ_k и Γ_l. Имеем

$$\begin{aligned} K\colon \Gamma_k &\to \cos\theta\cdot\Gamma_k - \sin\theta\cdot\Gamma_l \equiv \Gamma_k^*,\\ \Gamma_l &\to \sin\theta\cdot\Gamma_k + \cos\theta\cdot\Gamma_l \equiv \Gamma_l^*,\\ \Gamma_i &\to \Gamma_i, \qquad i\neq k,l. \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$S(K) = \exp\left(\theta/2\cdot\Gamma_k\Gamma_l\right),$$

или, что то же самое,

$$S(K) = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\cdot\Gamma_k\Gamma_l.$$

Половинный угол, фигурирующий в выражении для $S(K)$, есть характерная особенность спинорного представления. Он приводит к двузначности представления ортогональной группы матрицами $S(o)$.

Углы вращения в K могут быть не только вещественными. В частности, как мы увидим в дальнейшем, матрице T соответствует вращение на мнимый угол.

Особенно простой вид $S(K)$ имеет в случае $\Gamma_k = P_k^*$, $\Gamma_l = Q_k^*$:

$$\begin{aligned} S(K) &= \exp\left(\frac{\theta}{2}P_k^*Q_k^*\right) = \exp\left(\frac{i\theta}{2}s_k\right) = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}s_k = \\ &= 1\otimes 1\otimes\ldots\otimes\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\cdot s\right)\otimes 1\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1 = \\ &= 1\otimes 1\otimes\ldots\otimes\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0\\ 0 & e^{-i\theta/2}\end{pmatrix}\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1. \end{aligned}$$

Отсюда мы видим, что собственные значения $S(K)$ имеют 2^{n-1}-кратную степень вырождения и равны $e^{i\theta/2}$, $e^{-i\theta/2}$. Само вращение K, как легко видеть, имеет следующие собственные значения: $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$, 1, причем последнее $2(n-1)$-кратно вырождено.

Теперь рассмотрим произведение n коммутирующих плоских поворотов. $2n$ матриц Γ_j разбиваются на пары, причем плоскость, натянутая на пару $\{\Gamma_{j1}, \Gamma_{j2}\}$, поворачивается на угол θ_j. Имеем

$$K = \prod_{j=1}^{n} K_j,$$

а собственные значения K равны

$$e^{\pm i\theta_1}, e^{\pm i\theta_2}, \ldots, e^{\pm i\theta_n}.$$

Поскольку мы знаем представление каждого множителя в K, легко выписать и представление произведения

$$S(K) = \prod_{j=1}^{n} S(K_j) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{\theta_j}{2} \cdot \Gamma_{j1}\Gamma_{j2}\right).$$

В частном случае $\Gamma_{j1} = P_j^*, \Gamma_{j2} = Q_j^*$ имеем

$$S(K) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{1}{2}\theta_j P_j^* Q_j^*\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i\theta_1}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i\theta_1}{2}\right) \end{pmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i\theta_n}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i\theta_n}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Отсюда находим собственные значения:

$$\lambda = \exp\left[i/2(\pm\theta_1 \pm \theta_2 \pm \ldots \pm \theta_n)\right].$$

В общем случае произвольного выбора Γ_{j1}, Γ_{j2}, собственные значения будут теми же, поскольку, согласно теореме, последством преобразования эквивалентности от любого базиса $\ldots, \Gamma_{j1}, \Gamma_{j2}, \ldots$ можно перейти к базису $\ldots, P_j^*, Q_j^*, \ldots$. Но преобразование эквивалентности не изменяет собственных значений $S(o)$.

Итак, если вращение o имеет собственные значения

$$e^{i\theta_1},\ e^{-i\theta_1},\ e^{i\theta_2},\ e^{-i\theta_2},\ \ldots,\ e^{i\theta_n},\ e^{-i\theta_n},$$

то его спинорное представление $S(o)$ имеет собственные значения

$$\lambda = \exp[i/2(\pm\theta_1 \pm \theta_2 \pm \ldots \pm \theta_n)]$$

при любом выборе координатных осей в 2^n-мерном пространстве. В частности, отсюда следует, что собственные значения матрицы $V_1 = \prod(-iK^* P_k Q_k)$ равны $e^{\pm K^* \pm K^* \pm \ldots \pm K^*}$.

Впрочем, мы и не могли получить ничего другого. Оператор

$$V_1 = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} K^* C_k\right)$$

в естественном базисе пространства H записывается как

$$V_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} K^* & \operatorname{sh} K^* \\ \operatorname{sh} K^* & \operatorname{ch} K^* \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \operatorname{ch} K^* & \operatorname{sh} K^* \\ \operatorname{sh} K^* & \operatorname{ch} K^* \end{pmatrix} \otimes \ldots$$

и в каждом H_k заменой базиса приводится к виду

$$V_1 = \begin{pmatrix} e^{K^*} & 0 \\ 0 & e^{-K^*} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{K^*} & 0 \\ 0 & e^{-K^*} \end{pmatrix} \otimes \ldots$$

Теперь рассмотрим V_2. Каждый из сомножителей V_2, кроме последнего, соответствует некоторому повороту. Последний сомножитель тоже был бы поворотом, если бы не U.

Легко проверить следующие свойства U:

1) $U^2 = 1$;
2) $\left[\dfrac{1 \pm U}{2}\right]^2 = \dfrac{1 \pm U}{2}$;
3) $(1 - U)(1 + U) = 0$;
4) $U \cdot P_i Q_j = P_i Q_j \cdot U$ для любых i, j.

Таким образом, операторы $\dfrac{1 \pm U}{2}$ можно рассматривать как проекторы, действующие на пространстве $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \ldots \otimes H_n$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} V_+ &= \left(\frac{1+U}{2}\right) V = \left(\frac{1+U}{2}\right) V_2 V_1, \\ V_- &= \left(\frac{1-U}{2}\right) V = \left(\frac{1-U}{2}\right) V_2 V_1. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Имеет место следующее равенство:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}(1+U)\cdot V + \frac{1}{2}(1-U)\cdot V = \\
&= \frac{1}{2}(1+U)\left\{\prod_{i=1}^{n-1}\exp(iK'P_{i+1}Q_i)\cdot\exp(-iK'P_1Q_n)\times\right.\\
&\qquad\left.\times\prod_{k=1}^{n}\exp(-iK^*P_kQ_k)\right\}+\\
&+\frac{1}{2}(1-U)\left\{\prod_{i=1}^{n}\exp(iK'P_{i+1}Q_i)\cdot\prod_{k=1}^{n}\exp(-iK^*P_kQ_k)\right\} = \\
&= \frac{1}{2}(1+U)\cdot V_+ + \frac{1}{2}(1-U)\cdot V_-.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Здесь мы воспользовались свойствами оператора U, а также тождеством

$$\exp(-iK'P_1Q_nU) = \mathrm{ch}(-iK'P_1Q_n) + U\cdot\mathrm{sh}(-iK'P_1Q_n).$$

Таким образом, мы видим, что на самом деле представление поворотов в $2n$-мерном пространстве осуществляет не сама матрица $V = V_2V_1$, а ее проекции V_+ и V_-:

$$V_+ = S(R_+), \qquad V_- = S(R_-),$$

(R_+, R_- — некоторые вращения $2n$-пространства).

Теперь нам необходимо найти собственные значения каждой из матриц V_+, V_- по отдельности. После этого мы должны будем принять во внимание наличие проекторов $(1\pm U)/2$ в (3.24), то есть отбросить половину спектра V_+ и половину спектра V_-. Оставшиеся собственные значения и будут тогда составлять полный спектр матрицы V.

Найдем сначала собственные значения V_-. Для этого рассмотрим симметричный оператор

$$V_-^0 = V_1^{1/2}V_-V_1^{-1/2}.$$

Спектр V_- и V_-^0 очевидным образом совпадает.

Используя выражения для матриц V_1 и V_- в терминах P_k, Q_k,

$$V_1 = \prod_{j=1}^{n} \exp(-iK^* P_k Q_k),$$
$$V_- = \prod_{j=1}^{n} \exp(iK' P_{j+1} Q_j) \cdot \prod_{r=1}^{n} \exp(-iK^* P_r Q_r),$$

получаем следующее выражение для V_-^0:

$$V_-^0 = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{-iK^*}{2} P_j Q_j\right) \cdot \prod_{r=1}^{n} \exp(iK' P_{r+1} Q_r) \times$$
$$\times \prod_{l=1}^{n} \exp\left(\frac{-iK^*}{2} P_l Q_l\right) = S(R_-^0), \qquad (3.25)$$

где $R_-^0 = R_1 R_- R_1$ — произведение трех поворотов в $2n$-пространстве.

Первый и третий сомножители в (3.25) осуществляют представление $2n$-мерного поворота

$$R_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} K^* & i \operatorname{sh} K^* & & & \\ -i \operatorname{sh} K^* & \operatorname{ch} K^* & & & \\ & & \operatorname{ch} K^* & i \operatorname{sh} K^* & \\ & & -i \operatorname{sh} K^* & \operatorname{ch} K^* & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

в то время как R_- дается матрицей

$$R_- = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 2K' & & & & & -i \operatorname{sh} 2K' \\ & \operatorname{ch} 2K' & i \operatorname{sh} 2K' & & & \\ & -i \operatorname{sh} 2K' & \operatorname{ch} 2K' & & & \\ & & & \operatorname{ch} 2K' & i \operatorname{sh} 2K' & \\ & & & & \ddots & \\ i \operatorname{sh} 2K' & & & & & \operatorname{ch} 2K' \end{pmatrix}$$

Чтобы перемножить три матрицы, заметим, что R_1 и R_- можно переписать следующим образом:

$$R_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{P} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{P} \end{pmatrix} \qquad R_- = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & 0 & \dots & 0 & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\mathbf{B}} & 0 & 0 & \dots & \bar{\mathbf{B}} & \mathbf{A} \end{pmatrix},$$

где элементы $\mathbf{P}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\bar{\mathbf{B}}$ суть матрицы размера 2×2:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} K^* & i \operatorname{sh} K^* \\ -i \operatorname{sh} K^* & \operatorname{ch} K^* \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 2K' & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} 2K' \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i \operatorname{sh} 2K' & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \operatorname{sh} 2K' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будучи переписаны таким образом, три матрицы легко перемножаются (произведение блочных матриц находится точно так же, как произведение обычных, если рассматривать блоки как простые матричные элементы). В результате мы получаем:

$$R_-^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & 0 & \dots & 0 & \mathbf{b}^+ \\ \mathbf{b}^+ & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}^+ & \mathbf{a} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{b} & 0 & \dots & \dots & \mathbf{b}^+ & \mathbf{a} \end{pmatrix},$$

где элементы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — матрицы 2×2,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 2K' \cdot \operatorname{ch} 2K^* & i \operatorname{ch} 2K' \cdot \operatorname{sh} 2K^* \\ -i \operatorname{ch} 2K' \cdot \operatorname{sh} 2K^* & \operatorname{ch} 2K' \cdot \operatorname{ch} 2K^* \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2K' \cdot \operatorname{sh} 2K^* & -i \operatorname{sh} 2K' \cdot \operatorname{sh}^2 K^* \\ i \operatorname{sh} 2K' \cdot \operatorname{ch}^2 K^* & -\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2K' \cdot \operatorname{sh} 2K^* \end{pmatrix},$$

значок «$+$» у $\mathbf{b}^+$, как обычно, означает эрмитово сопряжение.

Чтобы найти теперь собственные значения оператора R_-^0, заметим, что оба поворота R_1, и R_- (а, значит, и сам R_-^0) коммутируют с

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица 2×2.

Следовательно, собственные векторы R^0_- следует искать среди собственных векторов матрицы Ω.

Нетрудно проверить непосредственным вычислением, что собственными векторами Ω являются

$$\psi_k = (v, \varepsilon_k v, \varepsilon_k^2 v, \ldots, \varepsilon_k^{n-1} v),$$

где v — произвольный двумерный вектор, а $\varepsilon_k = \exp\left(\dfrac{2\pi i k}{n}\right)$, $0 \leqslant$ $\leqslant k \leqslant n-1$.

Подставляя эти собственные векторы в уравнение $R^0_- \psi = E\psi$, приходим к выводу, что спектр оператора R^0_- есть совокупность собственных значений всех матриц

$$\alpha_{2k} = \mathbf{a} + \varepsilon_k \cdot \mathbf{b} + \varepsilon_k^{n-1} \cdot \mathbf{b}^+, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Легко найти, что детерминант α_{2k} равен единице. Поэтому ее собственные значения можно записать в виде $\exp(\pm\gamma_k)$, где γ_k определяется формулой

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} tr(\alpha_{2k}) &= \frac{1}{2}(e^{\gamma_{2k}} + e^{-\gamma_{2k}}) = \operatorname{ch}\gamma_{2k} = \\ &= \operatorname{ch} 2K^* \cdot \operatorname{ch} 2K' - \operatorname{sh} 2K^* \cdot \operatorname{sh} 2K' \cdot \cos(2k\pi/n),\end{aligned} \tag{3.26}$$

где $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Можно убедиться, что последнее уравнение имеет единственный положительный корень.

Таким образом, мы нашли собственные значения оператора R^0_-. Спектр V_- получается из него элементарно: это есть совокупность чисел

$$\exp\left[\frac{1}{2}(\pm\gamma_0 \pm \gamma_2 \pm \ldots \pm \gamma_{2n-2})\right]$$

со всевозможными комбинациями знаков.

Аналогичное вычисление для V_+ приводит к следующим собственным значениям:

$$\exp\left[\frac{1}{2}(\pm\gamma_1 \pm \gamma_3 \pm \ldots \pm \gamma_{2n-1})\right],$$

где γ_i определяются следующим выражением

$$\operatorname{ch}\gamma_{2k+1} = \operatorname{ch}2K^* \cdot 2K' - \operatorname{sh}2K^* \cdot \operatorname{sh}2K' \cdot \cos((2k+1)\pi/n),$$
$$0 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{3.27}$$

При выводе последнего соотношения необходимо принять во внимание равенство нулю коммутатора операторов R_+ и

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы последнего имеют вид

$$\psi_k = (v, \varepsilon_k v, \varepsilon_k^2 v, \dots, \varepsilon_k^{n-1} v),$$

где v — произвольный двумерный вектор, а $\varepsilon_k = \exp\left(\dfrac{(2k+1)\pi i}{n}\right)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Уравнение (3.27), как и (3.26), имеет только один положительный корень.

Из всей совокупности собственных значений операторов V_- и V_+ мы должны выкинуть половину. Именно, можно показать, что справедливо следующее утверждение: одна половина собственных значений V имеет вид $\exp\left[\dfrac{1}{2}(\pm\gamma_0 \pm \gamma_2 \pm \dots \pm \gamma_{2n-2})\right]$, вторая половина имеет вид $\exp\left[\dfrac{1}{2}(\pm\gamma_1 \pm \gamma_3 \pm \dots \pm \gamma_{2n-1})\right]$, причем комбинации знаков в каждом таком собственном значении таковы, что число минусов четно.

Таким образом, в результате всех вычислений мы можем выписать полную статсумму:

$$\begin{aligned} Z &= (2\operatorname{sh}2K)^{mn/2} \cdot \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i^m = \\ &= (2\operatorname{sh}2K)^{mn/2} \cdot \left\{ \sum \exp\left[\frac{m}{2}(\pm\gamma_0 \pm \gamma_2 \pm \dots)\right] + \right. \\ &\qquad \left. + \sum \exp\left[\frac{m}{2}(\pm\gamma_1 \pm \gamma_3 \pm \dots)\right] \right\}. \end{aligned}$$

Суммирования здесь ведутся по всем допустимым комбинациям знаков. Более компактно последнее выражение можно переписать следующим образом:

$$Z = \frac{1}{2}(2\,\mathrm{sh}\,2K)^{mn/2} \cdot \left\{ \prod_{l=1}^{n} \left(2\,\mathrm{ch}\,\frac{m\gamma_{2l}}{2}\right) + \prod_{l=1}^{n} \left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{m\gamma_{2l}}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \prod_{l=1}^{n} \left(2\,\mathrm{ch}\,\frac{m\gamma_{2l-1}}{2}\right) + \prod_{l=1}^{n} \left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{m\gamma_{2l-1}}{2}\right) \right\}.$$

В пределе $n, m \to \infty$ мы получаем:

$$Z \approx f \cdot \lambda_{\max}^{m},$$

где f — степень вырождения $\lambda_{\max}$.

Поскольку собственные значения подразделяются на две группы

$$\ln \lambda^{-} = \frac{1}{2}(\pm\gamma_0 \pm \gamma_2 \pm \ldots \pm \gamma_{2n-2}),$$
$$\ln \lambda^{+} = \frac{1}{2}(\pm\gamma_1 \pm \gamma_3 \pm \ldots \pm \gamma_{2n-1}),$$

то кандидатами на роль наибольшего собственного значения будут

$$\lambda_{\max}^{+} = \exp\left[\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_{2n-1})\right]$$

и

$$\lambda_{\max}^{-} = \exp\left[\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{2n-2})\right].$$

Из определения γ_{2k} и γ_{2k-1} мы видим, что при больших n $\gamma_{2k} \approx \approx \gamma_{2k-1}$. Поэтому для достаточно низких температур $(T < T_c)$ $\lambda_{\max}^{+} = = \lambda_{\max}^{-}$. Однако, с увеличением температуры $(T > T_c)$ γ_0 начинает вести себя совсем не так, как остальные γ_r: она начинает убывать, в то время как остальные возрастают. Это приводит к тому, что $(\lambda_{\max}^{-})^m$ становится пренебрежимо малой по сравнению с $(\lambda_{\max}^{+})^m$.

Для прояснения всей картины рассмотрим случай $K = K'$. Тогда

$$\mathrm{ch}\,\gamma_k = \mathrm{ch}\,2K^{*} \cdot \mathrm{ch}\,2K - \cos(k\pi/n),$$

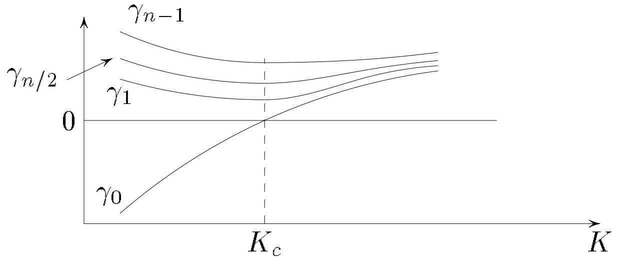

Рис. 3.12.

поскольку $\operatorname{sh} 2K^* \operatorname{sh} 2K = 1$.

Все γ_k, $1 \leqslant k \leqslant 2n-1$ имеют минимум в точке $K = K_c$, определяемой выражением

$$\operatorname{sh}^2 2K_c = 1.$$

γ_0 же меняет знак в этой точке (рис. 3.12).

Это приводит к равенству

$$\frac{\lambda^-_{\max}}{\lambda^+_{\max}} = \begin{cases} 1, & K > K_c,\ T < T_c, \\ e^{2(K-K^*)}, & K < K_c,\ T > T_c. \end{cases}$$

Таким образом, наибольшее собственное значение двукратно вырождено при $T < T_c$ и невырождено при $T > T_c$. Поэтому статсумма имеет следующий вид:

$$(2\operatorname{sh} 2K)^{-mn/2} \cdot Z =$$
$$= \begin{cases} 2\lambda^m_{\max} = 2\exp\left(\frac{m}{2}(\gamma_1 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_{2n-1})\right), & T < T_c, \\ \lambda^m_{\max} = \exp\left(\frac{m}{2}(\gamma_1 + \gamma_3 + \ldots + \gamma_{2n-1})\right), & T > T_c. \end{cases}$$

Фермионы и уравнения Дирака

Величина σ_x называется параметром порядка, поскольку в упорядоченной фазе при температуре, ниже критической ($T < T_c$), величина $\langle \sigma_x \rangle$ отлична от нуля. Каданов ввел дуальную величину μ_y, называемую параметром беспорядка. У этой величины ненулевое среднее появляется при температурах $T > T_c$.

Переменная μ_y задается координатой центра грани исходной решетки (или узла дуальной) y и «хвостом», начинающимся в y и уходящим на бесконечность вправо (рис. 3.13).

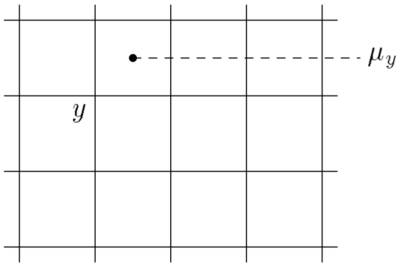

Рис. 3.13.

Будем считать, что y — это координата левой нижней вершины грани, в центре которой начинается μ_y.

На каждом ребре, которое пересекает его «хвост», μ_y меняет знак взаимодействия на противоположный. Условимся, что если некоторое ребро пересекается «хвостами» k раз, то взаимодействие на нем обращается тоже k раз, то есть константа взаимодействия умножается на $(-1)^k$.

В общем случае среднее $\langle \mu_{y_1} \mu_{y_2} \ldots \mu_{y_N} \rangle$ определяется следующей формулой:

$$\langle \mu_{y_1} \mu_{y_2} \ldots \mu_{y_N} \rangle = \frac{\tilde{Z}(y_1, y_2, \ldots, y_N)}{Z},$$

где $\tilde{Z}(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ — возмущенная статсумма.

Если же в какое-то среднее входит только одна величина μ_y, то для его вычисления можно считать, что

$$\mu_y = \prod_{(v,w)} \exp\left(-2K\sigma_v\sigma_w\right),$$

где произведение берется по всем ребрам $(v,\, w)$, пересекаемым «хвостом».

Так введенная величина μ_y на первый взгляд кажется нелокальной. Однако зависимость от «хвоста» слабая, и корреляционнные функции $\langle \mu_{y_1} \ldots \mu_{y_n} \rangle$ оказывается однозначными функциями своих аргументов (как и $\langle \sigma_{x_1} \ldots \sigma_{x_n} \rangle$). Действительно, рассмотрим замкнутый путь, окружающий некоторую двумерную область. Очевидно, что статсумма системы Z не изменится, если изменить знаки взаимодействия на ребрах, которые пересекает этот путь, поскольку каждой

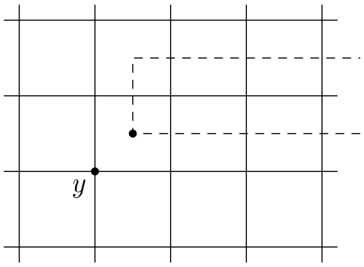

Рис. 3.14.

конфигурации, дающей вклад в $\tilde{Z}$, соответствует некоторая конфигурация такой же энергии, дающая вклад в Z. Поэтому рассмотрение двух разных «хвостов» с началом в одном и том же узле дуальной решетки приводит к одинаковому результату (рис. 3.14).

Рассмотрим теперь средние вида

$$\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \mu_{y_1} \dots \mu_{y_m} \rangle. \tag{3.28}$$

Величина $\langle \sigma_{x_1} \dots \sigma_{x_n} \mu_{y_1} \dots \mu_{y_m} \rangle$ не меняется при изменении «хвостов» до тех пор, пока какой-нибудь из них не пересечет одну из вершин X_i, входящих в (3.28). В случае, когда такое пересечение имеет место, (3.28) меняет знак. Действительно, в этом случае «хвост» деформируется таким образом, что конечный «хвост» отличен от начального на замкнутый контур, охватывающий x_i. Как и раньше, замкнутый контур можно стереть, осуществляя одновременно переворот спина σ_{x_i}. Поэтому корреляционная функция меняет знак.

Уравнения Дирака

На величины $\langle \sigma_x \sigma_{x_1} \dots \rangle$, $\langle \mu_y \mu_{y_1} \dots \rangle$ можно получить нелинейные уравнения, называемые уравнениями Швингера—Дайсона. Пишем по определению:

$$\langle \sigma_x \sigma_{x_1} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_x \sigma_{x_1} \exp\left\{ K \sum_{x,\delta} \sigma_x \sigma_{x+\delta} \right\},$$

где первое суммирование ведется по всем возможным конфигурациям спинов на решетке, а второе — по всем парам ближайших соседей, Z

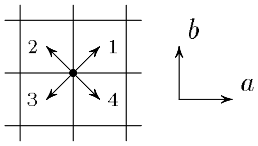

Рис. 3.15.

определяется формулой

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp\left\{ K \sum_{x,\delta} \sigma_x \sigma_{x+\delta} \right\}.$$

Изменим теперь знаки взаимодействия на всех ребрах, соединяющих спин σ_x с соседями. Легко видеть, что статсумма Z при этом не меняется, а корреляционная функция принимает вид

$$\langle \sigma_x \sigma_{x_1} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_x \sigma_{x_1} \cdot \exp\left\{ K \sum_{x,\delta} \sigma_x \sigma_{x+\delta} - 2K(\sigma_x \sigma_{x+a} + \right.$$
$$\left. + \sigma_x \sigma_{x-a} + \sigma_x \sigma_{x+b} + \sigma_x \sigma_{x-b}) \right\}.$$

Учитывая соотношение

$$\exp\{-2K\sigma_x\sigma_y\} = \mathrm{ch}(2K) - \mathrm{sh}(2K)(\sigma_x\sigma_y),$$

получим уравнение

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle &= \\ &= \langle \sigma_x \sigma_y \cdot [\mathrm{ch}(2K) - \mathrm{sh}(2K)(\sigma_x \sigma_{x+a})] \times \\ &\times [\mathrm{ch}(2K) - \mathrm{sh}(2K)(\sigma_x \sigma_{x-a})] \times \\ &\times [\mathrm{ch}(2K) - \mathrm{sh}(2K)(\sigma_x \sigma_{x+b})] \cdot [\mathrm{ch}(2K) - \mathrm{sh}(2K)(\sigma_x \sigma_{x-b})] \rangle. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Уравнения типа (3.29) и называются уравнениями Швингера—Дайсона. Анализ этих уравнений чрезвычайно труден ввиду их нелинейности. Мы поступим по-другому. У каждой точки x исходной решетки имеется четыре соседних с ней точки дуальной решетки: $\vec{x^*_\alpha} = \vec{x} + \vec{e}_\alpha$, где четыре вектора $\vec{e}_\alpha$ имеют длину $1/\sqrt{2}$ и направлены по диагонали к исходной решетке (рис. 3.15).

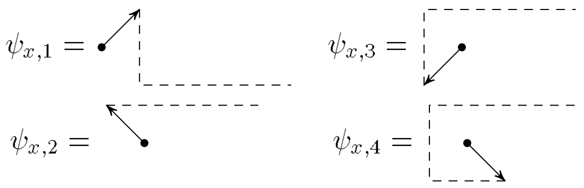

Рис. 3.16.

Рассмотрим объект

$$\psi_{x,\alpha} = \sigma_x \mu_{x+e_\alpha}. \tag{3.30}$$

При этом условимся располагать хвосты так, как показано на рис. 3.16.

Рассмотрим теперь среднее

$$\langle \psi_{x_1,\alpha_1} \ldots \psi_{x_n,\alpha_n} \rangle. \tag{3.31}$$

Будем предполагать, что хвосты ψ_{x_i,α_i}, входящих в (3.31), располагаются согласно следующему правилу: хвост объекта ψ_{x_i,α_i} проходит выше хвоста объекта ψ_{x_j,α_j}, если ψ_{x_i,α_i} в (3.31) стоит левее ψ_{x_j,α_j}.

Из этого правила непосредственно следует равенство:

$$\langle \psi_{x_i,\alpha_i} \psi_{x_j,\alpha_j} \rangle = -\langle \psi_{x_j,\alpha_j} \psi_{x_i,\alpha_i} \rangle. \tag{3.32}$$

Имея это в виду, объекты ψ_{x_i,α_i} часто называют фермионами.

Из определения $\psi_{x,2}$ получаем тождество

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{x,2} \rangle &= \langle \sigma_x \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-2\beta(\sigma_{x+na}\sigma_{x+na+b})\right\} \rangle = \\
&= \langle \sigma_x \cdot \exp\{-2K\sigma_x\sigma_{x+b}\} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \exp\{-2K(\sigma_{x+na}\sigma_{x+na+b})\} \rangle = \\
&= \langle \sigma_x \cdot [\mathrm{ch}(2K) - \mathrm{sh}(2K)\sigma_x\sigma_{x+b}] \times \\
&\qquad \times \prod_{n=1}^{\infty} \exp\{-2K(\sigma_{x+na}\sigma_{x+na+b})\} \rangle = \\
&= \mathrm{ch}(2K) \cdot \langle \sigma_x \mu_{x+e_1} \rangle - \mathrm{sh}(2K) \cdot \langle \sigma_{x+b} \mu_{x+b+e_4} \rangle = \\
&= \mathrm{ch}(2K) \langle \psi_{x,1} \rangle + \mathrm{sh}(2K) \langle \psi_{x+b,4} \rangle.
\end{aligned}$$

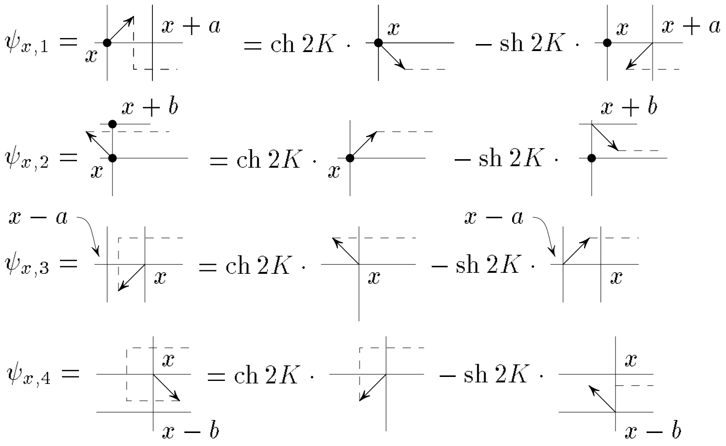

Рис. 3.17.

Знак перед $\mathrm{sh}(2K)$ изменен вследствие того, что при деформации хвоста μ_{x+b+e_4}, он пересек вершину $(x+b)$. Аналогичным образом получаются еще три тождества такого типа. В итоге мы приходим к следующей системе линейных уравнений, которым удовлетворяют фермионы (см. также рис. 3.17):

$$\begin{cases} \psi_{x,1} - s\psi_{x+a,3} + c\psi_{x,4} = 0, \\ c\psi_{x,1} - \psi_{x,2} + s\psi_{x+b,4} = 0, \\ s\psi_{x-a,1} - c\psi_{x,2} + \psi_{x,3} = 0, \\ s\psi_{x-b,1} - c\psi_{x,3} + \psi_{x,4} = 0, \end{cases} \tag{3.33}$$

где $c = \mathrm{ch}(2K)$, $s = \mathrm{sh}(2K)$, а a и b — векторы элементарных периодов решетки:

$$a = (\varepsilon, 0), \qquad b = (0, \varepsilon).$$

Ищем решение (3.33) в виде

$$\psi_{\vec{x},\alpha} = \sum_{\vec{p}} c_{\vec{p},\alpha} e^{i\vec{p}\vec{x}}, \tag{3.34}$$

где $\vec{p} = (p_1, p_2)$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$.

Подставляя (3.34) в (3.33) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях, получим систему

$$D_{\alpha\beta} c_{p,\beta} = 0, \tag{3.35}$$

где

$$D_{\alpha\beta}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -se^{i\vec{p}\vec{a}} & c \\ c & -1 & 0 & se^{i\vec{p}\vec{b}} \\ se^{-i\vec{p}\vec{a}} & -c & 1 & 0 \\ 0 & se^{-i\vec{p}\vec{b}} & -c & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие существования ненулевого решения (3.35):

$$\det D = 0.$$

Вычисляя детерминант D, получаем:

$$\det D = 2c^2[c^2 - 2s + s(2 - \cos(p_1\varepsilon) - \cos(p_2\varepsilon))] = 0,$$

откуда

$$\cos(\varepsilon p_1) + \cos(\varepsilon p_2) = \frac{c^2}{s} = \frac{1+s^2}{s} = s + \frac{1}{s}.$$

Введем следующую параметризацию:

$$\mathrm{ch}^2(K) = \frac{1}{1-t^2}, \qquad \mathrm{sh}^2(K) = \frac{t^2}{1-t^2}.$$

Тогда

$$c = \frac{e^{2K} + e^{-2K}}{2} = \mathrm{ch}^2(K) + \mathrm{sh}^2(K) = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$
$$s = \frac{e^{2K} - e^{-2K}}{2} = 2\,\mathrm{ch}(K)\,\mathrm{sh}(2K) = \frac{2t}{1-t^2},$$

откуда следует, что

$$c^2 - 2s = \frac{(t^2+2t-1)^2 + 4t^2}{(1-t^2)^2} \geqslant 0.$$

Таким образом, мы видим, что одна или обе компоненты вектора $\vec{p}$ должны быть мнимыми.

В критической точке импульсы p_1 и p_2 обращаются в нуль. Поэтому T_c определяется из условия

$$c^2 - 2s = 0,$$

откуда следует, что в критической точке

$$\mathrm{sh}(2K_c) = 1, \qquad \mathrm{ch}(2K_c) = \sqrt{2}.$$

Найдем слабо меняющееся по x решение в окрестности критической температуры. Введем параметр m и, считая $\varepsilon \ll 1$, запишем с точностью до бесконечномалых второго порядка по ε

$$c \approx \sqrt{2} + \frac{\varepsilon m}{2}, \qquad s \approx 1 + \frac{m\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Разложив s и c в окрестности критической температуры и сделав в (3.33) замену

$$\begin{cases} \psi_{x+a,\alpha} = \psi_{x,\alpha} + \varepsilon\partial_1\psi_{x,\alpha}, \\ \psi_{x+b,\alpha} = \psi_{x,\alpha} + \varepsilon\partial_2\psi_{x,\alpha}, \end{cases}$$

получим систему:

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_1\psi_1 = \dfrac{\varepsilon m}{\sqrt{2}}\psi_1 - \dfrac{\varepsilon m}{2}\psi_2 + \psi_1 - \sqrt{2}\psi_2 + \psi_3, \\ \varepsilon\partial_1\psi_3 = -\dfrac{\varepsilon m}{\sqrt{2}}\psi_3 + \dfrac{\varepsilon m}{2}\psi_4 + \psi_1 + \sqrt{2}\psi_4 - \psi_3, \\ \varepsilon\partial_2\psi_2 = \dfrac{\varepsilon m}{\sqrt{2}}\psi_2 - \dfrac{\varepsilon m}{2}\psi_3 + \psi_2 - \sqrt{2}\psi_3 + \psi_4, \\ \varepsilon\partial_2\psi_4 = -\dfrac{\varepsilon m}{\sqrt{2}}\psi_4 - \dfrac{\varepsilon m}{2}\psi_1 + \psi_2 - \sqrt{2}\psi_1 - \psi_4. \end{cases} \tag{3.36}$$

Объединив четыре вещественных функции в две комплексные

$$\chi_1 = \psi_1 + i\psi_3, \qquad \chi_2 = \psi_2 + i\psi_4,$$

получаем два комплексных уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon\partial_1\chi_1 &= \frac{\varepsilon m}{\sqrt{2}}\bar{\chi}_1 - \frac{\varepsilon m}{2}\bar{\chi}_2 + (1+i)\bar{\chi}_1 - \sqrt{2}\bar{\chi}_2, \\ \varepsilon\partial_2\chi_2 &= \frac{\varepsilon m}{\sqrt{2}}\bar{\chi}_2 - i\frac{\varepsilon m}{2}\bar{\chi}_1 + (1+i)\bar{\chi}_2 - i\sqrt{2}\bar{\chi}_1. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Сделаем теперь в (3.37) следующую замену переменных:

$$\chi_1 = e^{i\pi/4}\left(\theta_1 + \frac{\varepsilon m}{4\sqrt{2}}\bar{\theta}_2\right), \qquad \chi_2 = e^{-i\pi/4}\left(\theta_1 - \frac{\varepsilon m}{4\sqrt{2}}\bar{\theta}_2\right).$$

Члены нулевого порядка по ε в правой части уравнений (3.37) сокращаются, вторым и всеми дальнейшими порядками по ε мы пренебрегаем и поэтому получаем, что функции θ_i удовлетворяют уравнениям

$$\partial_1\theta_1 = \left(e^{-i\pi/4}\frac{m}{\sqrt{2}} - \frac{m}{2}\right)\bar{\theta}_1 + \frac{m}{2}\theta_2,$$
$$\partial_2\theta_1 = \left(e^{i\pi/4}\frac{m}{\sqrt{2}} - \frac{im}{2}\right)\bar{\theta}_1 - \frac{im}{2}\theta_2.$$

Положив $\partial = \partial_1 - i\partial_2$, $\bar{\partial} = \partial_1 + i\partial_2$, приходим к системе

$$\bar{\partial}\theta_1 = m\theta_2,$$
$$\partial\theta_1 = -im\bar{\theta}_1,$$

или, дифференцируя еще раз,

$$\partial\bar{\partial} = m\partial\theta_2,$$
$$\bar{\partial}\partial\theta_1 = -im\bar{\partial}\bar{\theta}_1.$$

Следовательно, $\partial\theta_1 = -i\bar{\partial}\bar{\theta}_2$, и мы получаем, что θ_i удовлетворяют двухкомпонентным уравнениям Дирака

$$\partial\theta_2 = m\theta_1, \qquad \bar{\partial}\theta_1 = m\theta_2,$$

а параметр m играет роль массы частицы, описываемой этими уравнениями.

3. Вершинные модели

Модель Изинга как вершинная модель

Следующий способ представления трансфер-матрицы и, следовательно, вычисления статистической суммы будет основан на трактовке модели Изинга как вершинной модели. При этом подходе основной механизм вычисления статсуммы связан с существованием большого количества коммутирующих с трансфер-матрицей операторов, то есть интегралов движения. Метод нахождения этих интегралов движения, которым мы воспользуемся, был предложен Бакстером.