ГЕОМЕТРИЯ, 1-ый курс, семинары 7-8.

20. – 27.10.1997

Задача 1 Установите гомеоморфизм между

1. $\mathbb{R}P^1$ и окружностью.
2. $\mathbb{R}P^2$ и сферой S^2 с отождествленными диаметрально противоположными точками.
3. $\mathbb{R}P^2$ и полусферой с отождествленными диаметрально противоположными точками границы.
4. $\mathbb{R}P^2$ и кругом, к которому по границе приклеен лист Мебиуса.
5. $\mathbb{C}P^1$ и сферой S^2.

Задача 2 Докажите, что множество всех прямых на плоскости (не обязательно проходящих через начало координат) — многообразие. Какова его размерность ? Докажите, что оно гомеоморфно листу Мебиуса.

Задача 3 Докажите, что множество всех лучей на плоскости — многообразие.

Задача 4 При каких условиях на квадратичную форму $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$ множество ее нулей $M_Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x,y) = 0\}$ является многообразием ? Чему M_Q гомеоморфно при различных Q ? Чему гомеоморфно замыкание M_Q в $\mathbb{R}P^2$? Решите ту же задачу для множества $\widetilde{M_Q} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid Q(x,y) = 0\}$ и его замыкания в $\mathbb{C}P^2$.

Задача 5 Пусть $E_P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = P_3(x)\}$, где $P_3(x)$ – многочлен степени 3 с действительными коэффициентами. При каких условиях на $P_3(x)$ множество E_P является многообразием. Чему E_P гомеоморфно ? Чему гомеоморфно замыкание E_P в $\mathbb{R}P^2$?

Задача 6 При каких a множество M_a является многообразием? Чему M_a гомеоморфно?

1. $M_a = \{(x,y,z) \mid (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2 + z^2 = 1\}$.

2. $M_a = \{(x, y, z) \mid (\sqrt{x^2 + z^2} - 4)^2 + y^2 = 1,\ z = a\}$.

3.** (Задача "на вырост") $M_a = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \sum x_i^2 = 1, \sum x_i^3 = a\}$. (Мы надеемся, что через некоторое время Вы будете легко решать подобные задачи.)

Задача 7 Докажите, что следующие многообразия гомеоморфны:

1. $\mathrm{SU}(2)$ и S^3;

2. $\mathrm{SO}(3)$, $\mathbb{R}P^3$, множество единичных касательных векторов к S^2 в $\mathbb{R}^3$, и конфигурационное пространство стула, шарнирно прикрепленного к одной точке (в $\mathbb{R}^3$).

3. $\mathbb{C}^n$ и пространство неупорядоченных наборов из n не обязательно различных комплексных чисел;

4. $\mathbb{C}P^n$ и пространство неупорядоченных наборов из n точек $\mathbb{C}P^1$ (в частности, $S^2 \times S^2 / \big((x, y) \sim (y, x)\big)$ и $\mathbb{C}P^2$). Совсем трудно доказать, что гомеоморфны пространство неупорядоченных наборов из n точек $\mathbb{R}P^2$ и $\mathbb{R}P^{2n}$;

5.* $S^2 \times S^2$ и множество, заданное в однородных координатах $(x : y : z : t)$ пространства $\mathbb{C}P^3$ уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$;

6.* $G_+(4, 2)$ и $S^2 \times S^2$;

7.* $\mathbb{C}P^2 / \big([x : y : z] \sim [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]\big)$ и S^4;

8.* $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 / \big(([x_1 : y_1], [x_2 : y_2]) \sim ([\overline{x_1} : \overline{y_1}], [\overline{x_2} : \overline{y_2}])\big)$ и S^4.

Доказательства желательно проводить с помощью явных формул.