Математический Колледж НМУ Геометрия, 1 семестр

Лекция 10

10 ноября 1997 г.

Пусть M — многообразие. Наша цель состоит в изучении способов превратить M в метрическое пространство, т.е. ввести на нем функцию $\varrho(p,q)$ — расстояние между точками p и q — удовлетворяющую стандартным аксиомам расстояния и уважающей структуру многообразия. Уточним последнее требование.

Во-первых, рассмотрим расстояние между очень близкими точками p и q. Тогда можно считать, что они лежат в пределах одной карты (системы координат), и координаты p равны $(x_1,\dots,x_n)$, а q равны $(x_1+dx_1,\dots,x_n+dx_n)$. Рассмотрим квадрат расстояния $\varrho^2(p,q)$ как функцию $dx_1,\dots,dx_n$ при фиксированных $x_1,\dots,x_n$. Первое требование согласованности состоит в том, чтобы $\varrho^2(p,q)$ в 1 порядке малости по $dx_1,\dots,dx_n$ вело себя как положительно определенная квадратичная формаg: $\varrho^2(p,q) = g(x)(dx) + o(\,|dx_1| + \ldots + |dx_n|)$. Эта форма может зависеть от координат $x_1,\dots,x_n$ точки p.

В принципе, данное описание следует уточнить — не совсем понятно, на каком линейном пространстве определена форма $g(x)$. Иная формулировка этого же вопроса такая: пусть точка p принадлежит пересечению двух карт и,тем самым, у нее есть два набора координат, связанные отображением перехода. Как при этом связаны формы g (например, их матрицы Грама) в различных координатах ? Мы в дальнейшем, однако, будем брать в качестве многообразия плоскость Лобачевского, что позволяет нам игнорировать эту трудность — на этом многообразии есть глобальная каноническая система координат.

В принципе, не существует способа восстановить функцию ϱ, зная только $g(x)$, т.е., расстояния между бесконечно близкими точками. Формы $g(x)$ (для всех x) достаточно, однако, чтобы измерять длины гладких кривых — кривую можно разбить на бесконечно малые отрезки. Вторым условием, которое мы наложим на метрику ϱ, будет требование, чтобы расстояние между точками p и q равнялось длине кратчайшей кривой, соединяющей эти точки. При выполнении этих двух требований метрика ϱ называется *римановой*; чаще, однако, римановой метрикой называют не ϱ, а семейство форм $g(x)$ (и говорят, соответственно, о римановой метрике в данной точке x).

Замечание Для римановой метрики аксиомы метрического пространства выполнены всегда. Действительно, из того, что квадратичная форма $g(x)$ обладает (как и всякая квадратичная форма) свойством $g(x)(-dx) = g(x)(dx)$, следует, что длина любой кривой не изменится, если эту кривую пройти в обратном порядке, и поэтому $\varrho(a,b) = \varrho(b,a)$. Кратчайшая кривая, соединяющая точки a и c, не может иметь длину, большую $\varrho(a,b)+\varrho(b,c)$, поскольку такую длину имеет объединение кратчайших кривых, проходящих через a,b и b,c. Аксиомы неотрицательности также проверяется несложно.

Теорема 1 *На плоскости Лобачевского существует единственная, с точностью до умножения на константу, риманова метрика, сохраняемая каждым аффинным преобразованием.*

Доказательство Нам нужно научиться измерять, с точностью до величин 2 порядка малости, длину бесконечно малого вектора $dz = dx + idy$, приложенного в точке $z = x + iy$ плоскости Лобачевского. Для этого зафиксируем некоторый бесконечно малый вектор v, приложенный в точке a. Проведем через a прямую L в направлении вектора v, а через z — прямую M в направлении dz. Существует единственное аффинное преобразование I рода, переводящее b в a, а M в L, причем так, чтобы образ вектора dz был сонаправлен вектору v. Тем самым образ вектора dz есть λv, где λ — некоторое положительное число. Тогда мы будем считать, что вектор dz в λ раз длиннее вектора v.

Для проверки того, что построенная нами функция “длина бесконечно малого вектора” порождается квадратичной формой (это было наше первое требование), нужно убедиться (см. лекцию 3), что она удовлетворяет тождеству параллелограмма. Кроме того, следует еще проверить ее инвариантность относительно аффинных преобразований II рода. Мы решим обе эти задачи, построив инвариантную риманову метрику явно. Для этого нам понадобится

Лемма *Пусть z_* является неподвижной точкой аффинного преобразования I рода $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Тогда $\frac{d}{dz}\frac{az+b}{cz+d}\Big|_{z_*}$ по модулю равен 1.*

Доказательство $\frac{d}{dz}\frac{az+b}{cz+d}\Big|_{z_*} = \frac{ad-bc}{(cz_*+d)^2}$. У равенства $z_* = \frac{az_*+b}{cz_*+d}$ рассмотрим мнимую часть:

$$\operatorname{Im} z_* = \operatorname{Im}\frac{az_*+b}{cz_*+d} = \operatorname{Im}\frac{(az_*+b)(c\overline{z_*}+d)}{|cz_*+d|^2} = \operatorname{Im}\frac{bc\overline{z_*}+adz_*}{|cz_*+d|^2} = \frac{ad-bc}{|cz_*+d|^2}\operatorname{Im} z_*,$$

откуда следует требуемое. ■

Под действием преобразования f, оставляющего на месте точку $z = x+iy$, всякий бесконечно малый вектор $dx+idy$, приложенный в этой точке, умножается на $f'(z_*)$. Поэтому в силу леммы его евклидова длина $\sqrt{dx^2+dy^2}$ не изменяется; то же самое верно и для аффинно инвариантной метрики. Поэтому эти две метрики пропорциональны. Коэффициент пропорциональности может, разумеется, зависеть от x и y, но инвариантность метрики относительно параллельных переносов $z \mapsto z+a$ ($a \in \mathbb{R}$) показывает, что от x этот коэффициент на самом деле не зависит.

Для определения зависимости от y выберем в качестве "стандартного вектора" v некоторый вектор idy, приложенный в точке $z = i$. Пусть теперь точно такой же (в стандартных координатах) вектор $w = idy$ приложен в точке ki, где $k \in \mathbb{R}$. Преобразование $z \mapsto z/k$ переводит ki в i, а w в idy/k. Поэтому длина вектора w равна $1/k$, и для аффинно инвариантной римановой метрики форма $g(x+iy)$ (квадрат длины) имеет вид $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$. Перед этим выражением можно поставить произвольную константу. ■

Теорема 2 *Кратчайшей кривой (в описанной выше аффинно инвариантной метрике), соединяющей точки $z_1, z_2 \in \Pi$, является прямая, соединяющая эти точки.*

Доказательство Аффинным преобразованием можно добиться того, чтобы точки z_1 и z_2 лежали на одном вертикальном луче. Поскольку метрика аффинно инвариантна (и понятие прямой — тоже, по определению), то достаточно доказать теорему для таких точек. Соединим z_1 и z_2 произвольной кривой γ. Разобьем плоскость Лобачевского на бесконечно узкие горизонтальные полоски. Нетрудно заметить, что из формулы $g(x+iy)(dx,dy) = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ следует, что пересечение кривой γ с каждой такой полоской не короче, чем пересечение с той же полоской вертикального луча. Поэтому вертикальный луч — кратчайшая линия, соединяющая z_1 и z_2. ■

Вычислим теперь расстояние между точками явно. Пусть сначала $z_1 = iy_1, z_2 = iy_2$ и, для определенности, $y_2 > y_1$. Тогда $\varrho(z_1,z_2) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} = \ln y_2/y_1$. Заметим теперь, что прямая $(z_1 z_2)$ пересекает абсолют в точках 0 и ∞, и отношение y_1/y_2 равно двойному отношению $[z_2, z_1, 0, \infty]$. Поскольку двойное отношение сохраняется при аффинных преобразованиях, получается такая формула: $\varrho(z_1,z_2) = |\ln |[z_2,z_1,a,b]||$, где a, b — точки пересечения прямой $(z_1 z_2)$ с абсолютом. Явное вычисление точек a и b дает окончательно $\varrho(z_1,z_2) = \operatorname{Arch}(1 + \frac{|z_1-z_2|^2}{2 \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2})$, где $\operatorname{Arch}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ln(t+\sqrt{t^2-1})$ — функция, обратная гиперболическому косинусу.

Метрика позволяет измерять площади фигур на плоскости Лобачевского. Площадь бесконечно малого прямоугольника со сторонами dx и dy, угол которого расположен в точке $z = x+iy$, равна $dxdy/y^2$. Для того, чтобы подсчитать площадь фигуры Φ, нужно разбить ее на такие прямоугольники и сложить их площади, т.е., найти $\int_\Phi \frac{1}{y^2}\,dxdy$. Площадь, как и длина, аффинно инвариантна — площадь фигуры равна площади ее образа при аффинном преобразовании. Более того, совершенно аналогично теореме 1 доказывается, что существует ровно один, с точностью до константы, способ определить площади фигур так, чтобы аффинная инвариантность имела место.