Листок 7
ГЕОМЕТРИЯ
Модель Пуанкаре на верхней полуплоскости

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 4 задач. Если в задаче есть несколько пунктов, то для того, чтобы её сдать нужно решить все пункты. Задачи со звёздочкой приравниваются к двум задачам без звездочки.

1. Докажите следующее:

а) дробно-линейные преобразования сохраняют двойное отношение четверки точек на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$;

б) дробно-линейное преобразование однозначно определяется образами трех точек.

2. Пусть l — прямая на евклидовой плоскости, γ — окружность с центром O на l, P — точка, не лежащая ни на l, ни на перпендикуляре к l из O. Докажите, что существует единственная окружность с центром на l, проходящая через P и ортогональная к γ.

3. Пусть l — прямая на евклидовой плоскости, γ — окружность с диаметром AB, лежащим на l, P — точка, не лежащая ни на l, ни на γ, ни на перпендикулярах к l из A и B. Докажите, что существуют единственная окружность с центром на l, проходящая через P и A, и единственная окружность с центром на l, проходящая через P и B.

4. Докажите, что все движения (т.е. изометрии, сохраняющие ориентацию) модели Пуанкаре на круге имеют вид

$$z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}},$$

где a и b — комплексные числа, для которых $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

5. Покажите, что для любых двух флагов найдется изометрия модели на полуплоскости, которая отображает первый флаг во второй (флаг — это тройка, состоящая из прямой l на гиперболической плоскости, одной из полуплоскостей с границей l и точки на прямой l).

6*. Найдите формулу для площади треугольника в гиперболической геометрии и вычислите площадь треугольника с вершинами в точках $1, -1, \infty$.

7. Докажите неравенство треугольника для модели Пункаре в верхней полуплоскости.

8*. Докажите, что группа изометрий расстояния Мёбиуса совпадает с группой $\mathcal{M}^+$.