НМУ, II курс, 21.09.2023

Листок 2.

Задача 1. Рассмотрим множество многочленов вида

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

и отождествим его с пространством $\mathbb{R}^n$ векторов $(a_{n-1}, \ldots, a_0)$. Найдите матрицу Якоби отображения $(P, Q) \to PQ$ пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{2n}$. Докажите, что определитель матрицы Якоби равен нулю тогда и только тогда, когда многочлены P и Q имеют общий корень.

Задача 2. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируемое отображение, причем матрица Якоби $f'(a)$ невырождена в каждой точке a.

(a) Докажите, что для всякого открытого множества U его образ $f(U)$ является открытым множеством.

(b) Докажите, что при $n = 1$ отображение f инъективно.

(c) Проверьте, что матрица Якоби отображения $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ невырожденна, но это отображение не является инъекцией.

Задача 3. Приведите пример такой всюду дифференцируемой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, но не существует окрестностей $U(0)$ и $V(0)$, для которых $f\colon U(0) \to V(0)$ — диффеоморфизм.

Задача 4. Пусть $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ – кривая на плоскости, заданная непрерывно дифференцируемыми функциями $x(t)$, $y(t)$, где $t \in [0, 1]$. Прямая l, пересекающая кривую γ называется трансверсалью, если во всех точках пересечения вектор скорости $\dot{\gamma}$ отличен от нуля и не параллелен l. Докажите, что множество точек пересечения кривой γ с прямой l конечно.

Задача 5. Рассмотрим уравнение $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = 0$. Пусть U – множество в $\mathbb{R}^n$ таких векторов $(c_{n-1}, \ldots, c_0)$, что уравнение имеет n различных вещественных корней. Из теоремы Виета известно, что $c_k = c_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_i – корни уравнения. Докажите, что для каждой точки $a \in U$ найдется окрестность, в которой $x_i = x_i(c_0, \ldots, c_n)$, причем корни x_i гладко зависят от коэффициентов c_i. Докажите, что U является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Задача 6. Докажите, что открытый круг, открытый квадрат, вся плоскость и открытый треугольник попарно диффеоморфны.

Задача 7. Выпишите уравнение $F(x, y, z) = 0$, задающее тор:

$$x(\varphi, \psi) = (R + r\cos\psi)\cos\varphi,\ y(\varphi, \psi) = (R + r\cos\psi)\sin\varphi,\ z(\varphi, \psi) = r\sin\psi, 0 < r < R.$$

Напишите уравнение касательной плоскости к тору.

Задача 8. Приведите пример такого гладкого векторного поля V на сфере S^{2n}, заданной уравнением $x_1^2 + \ldots + x_{2n}^2 = 1$, что $\langle V(x), x\rangle = 0$ и $V(x) \neq 0$ для всех точек $x \in S^{2n}$.

Задача 9. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – гладкое отображение, причем $f \circ f = f$. Докажите, что $f(\mathbb{R}^n)$ является гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$. Какой характеристикой f определяется размерность этой поверхности?

Задача 10. Пусть M^k — компактная гладкая k–мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ и задана функция $f\colon M^k \to \mathbb{R}$. Предположим, что, для всяких локальных координат $t_1, \ldots, t_k$ функция

$$(t_1, \ldots, t_k) \to f(x_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_k))$$

непрерывно дифференцируема. Докажите, что существует непрерывно дифференцируемая функция F на $\mathbb{R}^n$, ограничение которой на M^k совпадает с f. Верно ли это утверждение без предположения о компактности M^k.