Листок 1.

Задача 1. Найдите объем пересечения внутренностей двух цилиндров $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$.

Задача 2. Найдите объем тела, которое получается вращением куба вокруг диагонали.

Задача 3. Прямоугольник разбит на конечное число прямоугольников, у каждого из которых хотя бы одна из сторон имеет рациональную длину. Докажите, что у исходного прямоугольника одна из сторон имеет рациональную длину.

Задача 4. Из n-мерного шара радиусом $\sqrt{n}$ случайным образом выбирают точку $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Докажите, что вероятность события $\{x\colon x_1\le t\}$, вычисляемая как отношение объёма части шара, в которой $x_1\le t$, к объёму всего шара, стремится при $n\to\infty$ к величине

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}\,dx.$$

Задача 5. Пусть $f_1,\ldots,f_m$ — непрерывные функции на $[0,1]$ и $1\le i<m$. Докажите, что для всякого $t\in[0,1]$ произведение

$$\int_{0<u_1<\ldots<u_i<t} f_1(u_1)\cdots f_i(u_i)\,du_1\ldots du_i\cdot\int_{0<v_{i+1}<\ldots<v_m<t} f_{i+1}(v_{i+1})\cdots f_m(v_m)\,du_{i+1}\ldots du_m$$

является линейной комбинацией (коэффициенты которой не зависят от t и f_i) интегралов вида

$$\int_{0<u_1<\ldots<u_m<t} f_{i_1}(u_1)\cdots f_{i_m}(u_m)\,du_1\ldots du_m,$$

где $(i_1,\ldots,i_m)$ пробегает все перестановки элементов $\{1,2,\ldots,m\}$.

Задача 6. Пусть $I=[0,1]^n$. Найдите

$$\int_I \min\{x_1,\ldots,x_n\}\,dx,\quad \int_I \max\{x_1,\ldots,x_n\}\,dx,$$

$$\int_I \Big(\min\{x_1,\ldots,x_n\}\Big)^p\Big(\max\{x_1,\ldots,x_n\}\Big)^q\,dx,\ p,q>0.$$

Задача 7. (симметризация Штейнера) Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$. Для всякой точки $z\in\{x_n=0\}$ через l_z обозначим прямую, перпендикулярную гиперплоскости $\{x_n=0\}$. Рассмотрим множество $S(K)=\bigcup_z\{z\}\times[-q_z,q_z]$, где $q_z=\lambda_1(K\bigcap l_z)/2$.

(a) Докажите, что $\lambda_n(S(K))=\lambda_n(K)$ и $\operatorname{diam}S(K)\le\operatorname{diam}K$.

(b) Докажите изодиаметрическое неравенство: $\lambda_n(K)\le\omega_n(\operatorname{diam}K/2)^n$, где ω_n — объём единичного шара и K — произвольное компактное множество.

Задача 8. Докажите равенства

(i)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\big(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\big)\,dx=n\omega_n\int_0^{+\infty} f(r)r^{n-1}\,dr,$$

где ω_n – объем единичного шара.

(ii)

$$\int_{x_1\ge0,\ldots,x_n\ge0} f\big(\max\{x_1,\ldots,x_n\}\big)\,dx=n\int_0^{+\infty} f(r)r^{n-1}\,dr.$$

Задача 9. Пусть $f\ge0$ и $f(tx)=|t|^pf(x)$. Докажите, что

$$\lambda_n\Big\{x\colon\ f(x)\le1\Big\}=\frac{1}{\Gamma(1+n/p)}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(x)}\,dx,\quad \Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt.$$

Рассмотрите частный случай, когда $f(x)=\sum_j|x_j|^p$.

Задача 10. Пусть F,G — произвольные гладкие в окрестности замкнутого шара $\overline{B}$ отображения, причём $F=G$ на ∂B. Докажите равенство

$$\int_B \det F'(x)\,dx=\int_B \det G'(x)\,dx,$$

где F' и G' — матрицы Якоби.