НМУ, Математический анализ (1-й семестр). Листок 1. 6 сентября 2023 г.

Действительные числа

1. При каких значениях $a \in \mathbb{R}$ ограничены множества (а) $\{a^n | n \in \mathbb{N}\}$, (б) $\{a^n/n! \,|\, n \in \mathbb{N}\}$?

Аксиома полноты. Если L и R – непустые множества действительных чисел такие, что для любых элементов $l \in L$ и $r \in R$ выполнено $l \leqslant r$, то существует такое действительное число c, что $l \leqslant c \leqslant r$ для любых элементов $l \in L$, $r \in R$.

2. Докажите принцип вложенных отрезков: если дана бесконечная последовательность вложенных отрезков

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

то найдется действительное число, принадлежащее всем этим отрезкам.

3. Верен ли аналогичный «принцип вложенных интервалов»?

4. Дайте определение $\sqrt{2}$, докажите его существование и иррациональность.

5. (а) Дано множество отрезков на прямой, причем любые два из них имеют общую точку. Верно ли, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам?

(б) Верно ли аналогичное утверждение для прямоугольников на плоскости, стороны которых параллельны осям координат? (Прямоугольники рассматриваются вместе с внутренностью.)

(в) Верно ли это для произвольных прямоугольников на плоскости?

6. На отрезке $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ изобразите множество чисел $x \in [0, 1]$, троичная запись которых $x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, где $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$, обладает свойством:

(а) $(\alpha_1 \neq 0) \wedge (\alpha_2 \neq 1)$;

(б) $\forall i \in \mathbb{N}\, (\alpha_i \neq 1)$ (*канторово множество*).

7. Покажите, что канторово множество имеет мощность континуума.

8. Докажите, что, если $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ — две модели множества действительных чисел, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ — такое отображение, что $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$, то

(1) $f(0) = 0'$;

(2) $f(1) = 1'$, если $f(x) \not\equiv 0'$;

(3) $f(m) = m'$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $m' \in \mathbb{Z}'$, причем отображение $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}'$ биективно и сохраняет порядок;

(4) $f(\frac{m}{n}) = \frac{m'}{n'}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, $m', n' \in \mathbb{Z}'$, $n' \neq 0'$, $f(m) = m'$, $f(n) = n'$. Таким образом, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}'$ — сохраняющая порядок биекция.

9. Опираясь на предыдущую задачу и аксиому полноты, покажите, что аксиоматика множества действительных чисел полностью определяет его с точностью до изоморфизма. Другими словами, если $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ — два множества, удовлетворяющие аксиоматике, то существует взаимно однозначное соответствие $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$, сохраняющее арифметические операции и порядок: $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ и $(x \leqslant y) \Leftrightarrow (f(x) \leqslant f(y))$.

Открытые и замкнутые множества. Открытым называется множество, которое вместе с любой точкой содержит некоторую ее окрестность. Замкнутым множеством называется множество, содержащее все свои предельные точки.

10. (а) Докажите, что множество X замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R} \setminus X$ открыто.

(б) Докажите, что объединение любого и пересечение конечного числа открытых множеств – открытое множество.

(в) Сформулируйте и докажите аналог этого утверждения для замкнутых множеств.

(г) Всегда ли пересечение счетного числа открытых множеств открыто?

11. Докажите, что множество $X \subseteq \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.