Листок 1

Задача 1. Докажите, что функтор $**$ из категории конечномерных векторных пространств в себя изоморфен тождественному функтору (конструкция естественного преобразования обсуждалась на лекции, нужно проверить коммутативность диаграммы и биективность).

Задача 2. Опишите

(а) копроизведение в категории коммутативных $\mathbb{C}$-алгебр;

(б) произведение в категории компактных хаусдорфовых топологических пространств.

Задача 3. Пусть в категории $\mathcal{C}$ существуют произведения, а в категории $\mathcal{D}$ существуют копроизведения. Пусть контравариантные функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ задают эквивалентность категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$. Докажите, что F переводит произведения в копроизведения, а G переводит копроизведения в произведения.

Задача 4. Докажите, что $\mathrm{Hom}_{Vect}(F(S), E) \cong \mathrm{Hom}_{Set}(S, \Box E)$ не просто биекция, а изоморфизм функторов $S \mapsto \mathrm{Hom}_{Vect}(F(S), E)$, $S \mapsto \mathrm{Hom}_{Set}(S, \Box E)$ при фиксированном E и изоморфизм функторов $E \mapsto \mathrm{Hom}_{Vect}(F(S), E)$, $E \mapsto \mathrm{Hom}_{Set}(S, \Box E)$ при фиксированном S. Нужно проверить коммутативность всех соответствующих диаграмм.

В этой задаче $F : Set \to Vect$ – функтор, сопоставляющий множеству S векторное пространство с базисом S, то есть множество формальных линейных комбинаций $\sum c_i s_i$ с комплексными коэффициентами, а $\Box : Vect \to Set$ – забывающий функтор.

Задача 5.

(а) Постройте функтор $Vect \to Vect$, такой что $X \mapsto X \otimes V$ для фиксированного V (т.е. нужно указать, как он действует на форфизмы;

(б) Постройте биекцию $\mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z) \cong \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(Y, Z))$ (в категории векторных пространств).