# Двойственное пространство, определитель.

**Задача 1.** Пусть $\delta_a^{(k)}\colon \Bbbk[x] \xrightarrow{f\mapsto f^{(k)}(a)} \Bbbk$, $k \geqslant 0$, $a \in \Bbbk$ — линейный функционал, сопоставляющий многочлену его $k$-ю производную в точке $a$. Какому формальному ряду отвечает $\delta_a^{(k)}$ при изоморфизме $\Bbbk[x]^* \xrightarrow{\cong} k[[x]]$? Является ли множество этих функционалов линейно независимым при $a \in \Bbbk$ и $k \geqslant 0$?

**Задача 2.** Пусть $a_0, \dots, a_n \in \Bbbk$ — набор из $n+1$ различных чисел. На пространстве $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени не выше $n$ рассмотрим функционалы вычисления $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ в точках $a_0, \dots, a_n$, соответственно.

**а)** Покажите, что многочлены $g_i(x) \coloneqq \frac{\prod_{j\neq i}(x-a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}$, $i = 0, \dots, n$ и функционалы $\varphi_i$, $i = 0, \dots, n$ образуют двойственные базисы.

**б)** Покажите, что любой многочлен $g(x) \in \Bbbk[x]_{\leqslant n}$ можно единственным образом представить в виде

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} g(a_i) \frac{\prod_{j\neq i}(x-a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}.$$

Определим *спаривание* между векторными пространствами $V$ и $W$ отображение

$$V \times W \xrightarrow{(v,w)\mapsto\langle v,w\rangle} \Bbbk,$$

которое линейно по каждому аргументу. Спаривание *не вырождено*, если для любого ненулевого $v \in V$ существует такой $w \in W$, что $\langle v, w\rangle \neq 0$ и то же самое для любого ненулевого $w \in W$.

**Задача 3. а)** Покажите, что если спаривание не вырождено, то отображение $V \xrightarrow{v\mapsto\langle v,\ \rangle} W^*$ является изоморфизмом. Аналогично, $W \to V^*$ есть изоморфизм.

**б)** Пусть $D\colon f \mapsto f'$ — опертор дифференцирования на $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$. Для любого ряда $g(t) \in \Bbbk[[t]]$ обозначим через $g(D) \in \operatorname{End}(\Bbbk[x]_{\leqslant n})$ соответствующий дифференциальный оператор. Покажите, что операторы вида $g(D) \in \operatorname{End}(\Bbbk[x]_{\leqslant n})$ образуют коммутативное подкольцо, изоморфное кольцу вычетов $\Bbbk[D]/(D^{n+1})$.

**в)** Определим спаривание $\Bbbk[D]/(D^{n+1}) \times \Bbbk[x]_{\leqslant n} \to \Bbbk$ формулой

$$\langle g(D), f(x)\rangle \coloneqq \big[g(D)f\big](0).$$

Покажите, что это спаривание не вырождено.

**г)** Опишите оператор $D^*\colon \Bbbk[D]/(D^{n+1}) \to \Bbbk[D]/(D^{n+1})$ двойственный оператору дифференцирования $D\colon \Bbbk[x]_{\leqslant n} \to \Bbbk[x]_{\leqslant n}$.

**д)** Опишите операторы $\nabla^*$ и $\Delta^*$ двойственные разностным операторам

$$\nabla\colon f(x) \mapsto f(x) - f(x-1); \qquad \nabla\colon f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$$

на пространстве $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$.

**Задача 4.** Фиксируем два набора чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Вычислите определители следующих матриц: **а)** $(\alpha_i\beta_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$; **б)** $\big(\cos(\alpha_i - \beta_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$; **в*)** $\big(\alpha^{j-i-1 \mod n}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

**Задача 5. а)** Докажите, что для *определителя Вандермонда* верно равенство

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j).$$

**б)** Вычислите определитель следующей матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1(x_1-1) & \cdots & x_1(x_1-1)\cdots(x_1-n+1) \\ 1 & x_2 & x_2(x_2-1) & \cdots & x_2(x_2-1)\cdots(x_2-n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n(x_n-1) & \cdots & x_n(x_n-1)\cdots(x_n-n+1) \end{pmatrix}.$$

**Задача 6.** Покажите, что для линейной независимости набора функций $f_1, \ldots, f_n \colon M \to \Bbbk$ на произвольном множестве $M$ необходимо и достаточно существование такого набора точек $x_1, \ldots, x_n \in M$, что $\det\big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0$.

**Задача 7.** Рассмотрим векторное пространство $n-1$ раз дифференцируемых функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Определим *Вронскиан* набора функций $W(f_1, \ldots, f_n)(t) := \det \begin{pmatrix} f_1(t) & \ldots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \ldots & f_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ Докажите, что если набор функций $f_1, \ldots, f_n$ линейно зависим, то $W(t) \equiv 0$. Верно ли обратное? Докажите, что если хотя бы в одной точке $W(t) \neq 0$, то набор функций линейно независим. Докажите, что набор функций $e^{\lambda_i t}, i = 1, \ldots, n, \lambda_i \neq \lambda_j$ линейно независим.

**Задача 8.** Сколько существует **а)** матриц $2\times 2$ над полем $\mathbb{F}_p$, $p$ — простое, с заданным определителем; **б)** невырожденных $n \times n$ матриц над полем из $q$ элементов.

**Задача 9*.** Пусть $\Gamma$ — связный граф без петель и кратных рёбер. Занумеруем вершины графа числами от 1 до $n$. Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ элементы, которой $a_{ii} = -\#\{\text{ребра при вершине } i\}$, $a_{ij} = 1$, если существует ребро $ij$, и нулю иначе. Докажите, что

**а)** $\det A = 0$;

**б)** все алгебраические дополнения $A_{ii}$ отличны от нуля и равны между собой;

**в)** $\Gamma$ — дерево если и только если все $A_{ii}$ равны 1.

**Задача 10.** Вычислите все частные производные вида $\frac{\partial^k \det A}{\partial a_{i_1 j_1} \cdots \partial a_{i_k j_k}}$.

**Задача 11. а)** Покажите, что однородный грассманов квадратичный многочлен $\omega$ от четырёх переменных является произведение двух линейных форм тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 4}(\Bbbk)$, пусть $A_{ij}$ — минор $2\times 2$ состоящий из $i$-го и $j$-го столбцов.
**б)** Покажите, что набор из 6 чисел $A_{ij} \in \Bbbk$ образуют набор $2\times 2$ миноров матрицы размера $2\times 4$ тогда и только тогда, когда выполнено $A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0$.

Существуют ли $2\times 4$ матрицы со следующим набором миноров[1] **в)** $\{2,3,4,5,6,7\}$; **г)** $\{3,4,5,6,7,8\}$? Если матрица существует приведите пример.

**Задача 12. а)** Покажите, что любая *кососимметричная* матрица, т.е. $A^t = -A$, нечётного размера вырождена.
**б)** Определители кососимметрических матриц размеров $2\times 2$ и $4\times 4$ являются полными квадратами в кольцах многочленов от матричных элементов.
**в*)** То же верно для кососимметричной матрицы любого чётного размера $2n \times 2n$.

[1] написаны в порядке возрастания значений