НМУ, Алгебра-1
Листок 9. 31.10.2022

Задача 1.
Пусть M и N — нётеровы модули над кольцом R. Докажите, что $M \otimes_R N$ также нётеров.

Задача 2.
Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем K и B — невырожденная билинейная форма на V. Пусть $A : V \to V$ — линейный оператор и из $v \perp w$ следует $Av \perp Aw$, A^* — сопряженный оператор относительно формы B. Докажите, что для некоторого $c \in K$ выполнено равенство $A^*A = c \cdot \mathrm{id}_V$.

Задача 3.
Пусть ℓ^2 — множество всех последовательностей вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots)$ таких, что ряд

$$\sum_n x_n^2$$

сходится.

а) Покажите, что ℓ^2 — векторное пространство относительно почленного сложения и умножения на число.

б) Покажите, что сумма

$$\langle x, y \rangle = \sum_n x_n y_n$$

сходится и задаёт невырожденную билинейную форму на ℓ^2.

Задача 4.
Пусть $q = p^n$, p — простое число. Рассмотрим поле $\mathbb{F}_q$ как векторное пространство над $\mathbb{F}_p$ и поставим в соответствие каждому элементу $x \in \mathbb{F}_q$ линейный оператор умножения на x. Докажите, что билинейная форма $\mathrm{tr} : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_p$, $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(xy)$ невырождена.

Задача 5.
Зададим линейный функционал f на пространстве $\mathbb{R}[x]$ формулой $f(x^n) = \frac{1}{n+1}$. Докажите, что билинейная форма $I(p(x), q(x)) = f(p(x)q(x))$ невырождена.

Задача 6*.
Сколько существует ортогональных матриц $(2n + 1) \times (2n + 1)$ над полем $\mathbb{F}_7$?