НМУ, Алгебра-1
Листок 8. 24.10.2022

Задача 1.

а) Пусть a и b — целые числа с наибольшим общим делителем d. Докажите, что
$$\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

б) Пусть R — коммутативное кольцо, а I и J — идеалы в нём. Вычислите $R/I \otimes_R R/J$.

Задача 2.
Пусть V и W — векторные пространства над полем K. Докажите, что $(V \otimes_K W)^* \cong V^* \otimes_K W^*$.

Задача 3.
Пусть I — произвольное множество и M_i — R-модуль для любого $i \in I$.

а) Докажите, что существует единственный с точностью до изоморфизма модуль M с набором гомоморфизмов $f_i : M_i \to M$ такой, что для всякого модуля N и всякого набора гомоморфизмов $g_i : M_i \to N$ существует единственный гомоморфизм $H : M \to N$ такой, что $g_i = Hf_i$ для всех $i \in I$.

б) Докажите, что существует единственный с точностью до изоморфизма модуль $\mathcal{M}$ с набором гомоморфизмов $p_i : \mathcal{M} \to M_i$ такой, что для всякого модуля N и всякого набора гомоморфизмов $g_i : N \to M_i$ существует единственный гомоморфизм $H : N \to \mathcal{M}$ такой, что $Hg_i = f_i$.

Задача 4.

а) Пусть M — конечнопорожденный модуль над коммутативным кольцом R и для некоторого натурального числа k выполнено
$$M^{\otimes k} = \underbrace{M \otimes_R \ldots \otimes_R M}_{k \text{ раз}} = 0.$$
Докажите, что $M = 0$.

б) Верно ли это для произвольных модулей?

Задача 5.
Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем K и $\dim_K V > 2$. Докажите, что существует векторное пространство W и линейный оператор $A : V \otimes_K V \to W$ такие, что A инъективен на элементарных тензорах, но не инъективно на всём $V \otimes_K V$.

Задача 6.
Пусть G — группа.

а) Докажите, что существует и единственна такая абелева группа $\mathcal{G}$ с гомоморфизмом $\pi : G \to \mathcal{G}$, что для любого гомоморфизма $f : G \to H$, где H — абелева группа, существует единственный гомоморфизм $h : \mathcal{G} \to H$ такой, что $f = h\pi$.

б) Вычислите $\mathcal{G}$ для $G = S_n$ (группа перестановок) и $G = \mathcal{F}_n$ (свободная группа).

в) Вычислите $\mathcal{G}$ для $G = GL_3(\mathbb{R})$ (группа обратимых матриц 3×3).