# НМУ, Алгебра-1
# Листок 7. 17.10.2022

**Задача 1.**
Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство и линейный оператор $A : V \to V$ записывается матрицей $\{a_{ij}\}$. Определим *след* $A$ формулой

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$$

а) Покажите, что $\mathrm{tr}(A)$ не зависит от выбора базиса.

б) Пусть $V$ — векторное пространство над $\mathbb{C}$. Покажите, что $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

**Задача 2.**
Пусть $A$ — прямоугольная матрица с коэффициентами в поле $K$. Назовем столбцовым рангом $A$ размерность векторного пространства, порожденного столбцами $A$, и аналогично определим строчный ранг. Докажите, что эти ранги всегда равны, проинтерпретировав столбцовый ранг в бескоординатных терминах и рассмотрев двойственный оператор.

**Задача 3.**
Пусть $V$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$. Будем говорить, что оператор $A : V \to V$ слабо нильпотентен, если для любого $v \in V$ и любого $f \in V^*$ последовательность вещественных чисел $|f(A^n v)|^{1/n}$ стремится к нулю.

а) Докажите, что если $V$ конечномерно, то все слабо нильпотентные операторы нильпотентны.

б) Верно ли это в бесконечномерном случае?

**Задача 4.**
Пусть $K$ — поле. Постройте изоморфизм $K(x)[y]/(y^2 - x^3) \cong K(t)$. Является ли кольцо $K[x, y]/(y^2 - x^3)$ кольцом главных идеалов?

**Задача 5.**
Будем говорить, что модуль $P$ над кольцом $R$ проективен, если для любой пары модулей $M, N$ и любой пары гомоморфизмов $g : P \to M$ и $f : N \to M$ такой, что $f$ сюръективен, существует гомоморфизм $h : P \to N$ такой, что $fh = g$.

а) Покажите, что если $P$ проективен, то существует свободный модуль $F$ и модуль $M$ такой, что $F \cong P \oplus M$.

б) Покажите, что необходимое условие выше также является достаточным.

**Задача 6.**
Пусть $R$ — кольцо. Назовем дифференцированием такое отображение $D : R \to R$, что для любой пары $a, b \in R$ выполнено $D(a + b) = Da + Db$ и $D(ab) = Da \cdot b + a \cdot Db$.

а) Пусть $D_1, D_2$ — дифференцирования. Покажите, что $[D_1, D_2] := D_1D_2 - D_2D_1$ также является дифференцированием.

б) Пусть $A$ — конечномерная алгебра над $\mathbb{C}$, а $D$ — её дифференцирование. Покажите, что $\exp(D)$ — автоморфизм.

**Задача 7.**
Пусть $I \subset \mathbb{Z}[x]$ — идеал.

а) Докажите, что множество всех старших коэффициентов полиномов из $I$ образует идеал и если старший коэффициент многочлена $p(x) \in I$ степени $n$ порождает этот идеал, то для любого $f(x) \in I$ найдутся $r(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$: $\deg r(x) < n$ и $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$.

б) Докажите, что множество $\{s(x) \in I : \deg s(x) < n\}$ — конечнопорожденная абелева группа и заключите, что всякий идеал $\mathbb{Z}[x]$ конечнопорождён.

в)* Докажите, что если $R$ — нётерово кольцо, то $R[x]$ также нётерово.

**Задача 8.**
Зададим абелеву группу $G$ формулой $G = \prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (это аддитивная группа кольца $R$ из Задачи 2 Листка 5). Покажите, что $\mathrm{Tor}(G)$ не является прямым слагаемым в $G$.