НМУ, Алгебра-1
Листок 6. 10.10.2022

Задача 1.
Пусть R — коммутативное кольцо, а M — конечнопорожденный R-модуль.

а) Покажите, что для любого гомоморфизма $R-$модулей $\varphi : M \to M$ существует полином $p(x) \in R[x]$ со старшим коэффициентом 1 такой, что $p(\varphi) = 0$.

б) Пусть $I \subset R$ — идеал, причем $IM = M$. Покажите, что существует $r \equiv 1 \pmod I$ такое, что $rM = 0$.

Задача 2. Пусть $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ — $\mathbb{Z}$-модуль, состоящий из последовательностей $\{(x_n) : x_n \in \mathbb{Z}\}$ с почленным сложением и умножением на элементы $\mathbb{Z}$. Положим $R = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$. Докажите, что $R-$модули R и R^2 изоморфны.

Задача 3. Пусть I — конечнопорожденный идеал в коммутативном целостном кольце R, $I^2 = I$. Покажите, что $I = R$ или $I = 0$.

Задача 4.
Опишите все конечнопорожденные абелевы группы G, для которых существует гомоморфизм $f : G \to G$ такой, что для всех $g \in G$ выполнено $f(f(g)) = -g$.

Задача 5*.
Пусть R — целостное коммутативное нётерово кольцо. Пусть в R есть лишь конечное число максимальных идеалов и всякий простой идеал максимален. Покажите, что всякий максимальный идеал в R главный.
Указание: Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал. Воспользуйтесь китайской теоремой об остатках и постройте элемент, порождающий $\mathfrak{m}$.

Задача 6.

а) Пусть $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Покажите, что для всякого ненулевого идеала $I \subset \mathcal{O}$ фактор $\mathcal{O}/I$ содержит конечное число элементов.

б) Докажите, что кольцо $\mathcal{O}$ нётерово и содержит неглавный максимальный идеал.

в) Покажите, что для всякого простого числа p существует не более двух максимальных идеалов $\mathfrak{m}$ в $\mathcal{O}$, содержащих (p). Выведите отсюда, что существует бесконечно много простых чисел.

Задача 7.
Пусть A и B — коммутативные кольца, $A \subset B$. Будем говорить, что элемент $b \in B$ цел над A, если существуют $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что $b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_n = 0$.

а) Покажите, что b цел тогда и только тогда, когда существует конечнопорожденный A-модуль $M \subset B$, являющийся подкольцом и такой, что $b \in M$.

б) Покажите, что целые над A элементы B образуют кольцо.

в) Опишите целые над $\mathbb{Z}$ элементы $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$.