НМУ, Алгебра-1
Листок 3. 19.09.2022

Задача 1. Пусть $C[0,1]$ — множество непрерывных функций $[0,1] \to \mathbb{R}$. Покажите, что $C[0,1]$ образует векторное пространство и найдите его размерность.

Задача 2. Для каждого поля $\mathbb{K}$ обозначим через $\Delta : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ отображение первой разности: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

а) Пусть $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$. Покажите, что Δ сюръективно. Что будет, если $\operatorname{char} K \neq 0$?

б) Найдите такой полином $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, что для любого натурального n выполнено равенство
$$1^4 + \ldots + n^4 = p(n).$$

Задача 3. Пусть U — векторное пространство, а V_1, V_2, V_3 — его подпространства.

а) Докажите, что $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$.

б) Верно ли, что $\dim(V_1+V_2+V_3) = \dim(V_1)+\dim(V_2)+\dim(V_3)-\dim(V_1 \cap V_2) - \dim(V_1 \cap V_3) - \dim(V_2 \cap V_3) + \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$?

Задача 4. Пусть V — векторное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Назовём двойственным базисом $e_1^*, \ldots, e_n^*$ набор векторов в V^* такой, что $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Пусть матрица отображения $A : V \to W$ в базисах $e_1, \ldots, e_n; f_1, \ldots, f_m$ имеет вид $\{a_{ij}\}_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$. Найдите матрицу отображения $A^* : W^* \to V^*$ в двойственных базисах.

Задача 5. Для натурального числа n построим случайную матрицу $\mathbf{A} \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F}_5)$ следующим образом: для всех $i, j \le n$ элемент a_{ij} выберем из набора $\{0,1,2,3,4\}$ равномерно случайно и независимо от всех остальных элементов. Какова вероятность того, что $\mathbf{A}$ обратима?

Задача 6. Какова размерность векторного пространства над $\mathbb{Q}$, порожденного числами $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{2}$?

Задача 7.

а) Постройте инъективный гомоморфизм $\mathbb{R}$-алгебр $\mathbb{C} \to \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$.

б) Существует ли инъективный гомоморфизм $\mathbb{H} \to \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$? $\mathbb{H} \to \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$?

в) Существует ли инъективный гомоморфизм $\mathbb{H} \to \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R})$?

Задача 8.
Пусть $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ — последовательность Фибоначчи.

а) Покажите, что
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

б) Диагонализуйте матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и тем самым получите явную формулу для F_n.

в) Докажите, что $F_{n+p^2-1} - F_n$ делится на p для любого простого $p \neq 5$ и натурального n.