НМУ, Алгебра-1
Листок 2. 12.09.2022

Задача 1. Пусть G — группа.

а) Докажите, что если $g^2 = 1$ для всех $g \in G$, то G абелева.

б) Верно ли то же самое, если $g^3 = 1$ для всех $g \in G$?

Задача 2.

а) Пусть в кольце R для любого r выполнено $r^3 = r$. Докажите, что R коммутативно.

б) Пусть кольцо R не содержит ненулевых нильпотентов. Докажите, что каждый идемпотент лежит в его центре.

в) Пусть в кольце R для любого r выполнено $r^5 = r$. Верно ли, что R коммутативно?

Задача 3.

а) Пусть F — конечное поле. Докажите, что каждое отображение $F \to F$ задается многочленом.

б) Для любого простого p разложите многочлен $x^p - x \in \mathbb{F}_p[x]$ на неприводимые множители.

в) Пусть p — простое число. Докажите, что существует единственный многочлен $t_p(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ такой, что $t_p(k) = 2^k$ для всех $0 \le k \le p-1$ и при этом $\deg t_p < p$. Чему равен коэффициент $t_p(x)$ при x^{p-2}?

Задача 4. Пусть K — поле, а G — конечная подгруппа в K^*.

а) Будем говорить, что элемент $x \in K^*$ имеет порядок d, если $x^d = 1$, но $x^{d'} \neq 1$ при $d' < d$. Покажите, что K содержит не более $\varphi(d)$ элементов порядка d.[1]

б) Докажите, что группа G — циклическая.

в) Остаток $g \mod p$ называется первообразным корнем, если g имеет порядок $p-1$ в группе $\mathbb{F}_p^*$. Сколько существует первообразных корней $\mod p$? Найдите все первообразные корни $\mod 13$.

Задача 5. Пусть n — натуральное число. Опишите группу автоморфизмов группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Задача 6.

а) Найдите все автоморфизмы поля $\mathbb{R}$.

[1] Здесь $\varphi(d)$ — функция Эйлера числа d, то есть количество натуральных n с условиями $1 \le n \le d$ и $(n,d) = 1$

б) Найдите все автоморфизмы поля $\mathbb{C}$, фиксирующие[2] $\mathbb{R}$, и все автоморфизмы поля $\mathbb{C}(x)$, фиксирующие $\mathbb{C}$.

Задача 7.
Пусть $f : V \to V$ — инъективный гомоморфизм векторных пространств. Докажите, что если V конечномерно, то f является изоморфизмом. Верно ли то же самое для произвольных векторных пространств?

[2]Это означает, что если σ — такой автоморфизм, то $\sigma(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$