НМУ, Алгебра-1
Листок 11. 20.11.2022

Задача 1.

а) Пусть группа G транзитивно действует на множестве X. Каково среднее значение числа неподвижных элементов по всей G?

б) Какое наименьшее возможное среднеквадратичное этого числа и когда оно достигается?

Задача 2.
Пусть Q — группа всех обратимых элементов гурвицевых кватернионов. Найдите порядок Q и опишите все её нормальные подгруппы.
Задача 3.
Докажите, что множество всех непрерывных гомоморфизмов из $\mathbb{R}^+$ в $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ образует группу относительно умножения $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$ и опишите эту группу.
Задача 4.
Пусть p — простое число.

а) Предположим, что $A = pa_1 + a_0$, $B = pb_1 + b_0$, $0 \leq a_0, b_0 \leq p - 1$. При помощи действий групп докажите сравнение

$$\binom{A}{B} \equiv \binom{a_1}{b_1}\binom{a_0}{b_0} \pmod p$$

б) Докажите, что биномиальный коэффициент $\binom{A}{B}$ делится на p тогда и только тогда, когда существует k такое, что k-ый знак A в системе счисления по основанию p меньше k-ого знака B.

Задача 5.
Пусть $SL_2(\mathbb{Z})$ — группа матриц 2×2 с целыми коэффицентами и с определителем 1. Докажите, что данная группа порождена матрицами

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 6.
Опишите классы сопряженности в группе $GL_n(\mathbb{C})$.
Задача 7*.
Пусть $SL_2(\mathbb{F}_5)$ — группа матриц 2×2 с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_5$ и с определителем 1. Обозначим через $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ её фактор по подгруппе, состоящей из матриц $\pm E$. Докажите, что $PSL_2(\mathbb{F}_5) \cong A_5$.