Обыкновенные дифференциальные уравнения 2022, листок 7 (16 ноября)

Задача 1. Докажите теорему Дарбу: симплектические пространства равной размерности симплектоморфны, т.е. найдется изоморфизм, переводящий одну симплектическую структуру в другую.

Задача 2. Докажите, что симплектические пространства четномерны.

Задача 3. Пусть симплектическая структура имеет вид $\omega = \sum p_i \wedge q_i$ для базиса некоторого базиса $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$ двойственного пространства. Найти аннулятор ограничения симплектической структуры на ядро ковектора $\sum a_i p_i + b_i q_i$.

Задача 4. Докажите, что размерность любого изотропного подпространства (т.е. такого, что ограничение симплектической формы равно нулю) не больше n.

Задача 5. Докажите, что любое лагранжево пространство переводится в любое другое лагранжево пространство симплектоморфизмом.

Задача 6. Найдите размерность симплектической группы $Sp(n)$.

Задача 7. Найдите число орбит естественного действия $Sp(n)$ на грассманиане $Gr(k, 2n)$ k-мерных плоскостей в $2n$-мерном симплектическом пространстве.

Задача 8. Лагранжевы пространства образуют многообразие размерности $\frac{n(n+1)}{2}$. Это многообразие называется лагранжевым грассманианом или лагранжевым многообразием Грассмана и обозначается через Λ_n.

Задача 9. Верно ли, что если распределение ξ локально задано 1-формами α и β, то при каждом x внешние 2-формы $d\alpha|_{\xi(x)}$ и $d\beta|_{\xi(x)}$ пропорциональны?

Задача 10. Рассмотрим стандартную сферу S^3 единичного радиуса в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с евклидовыми координатами (x_1, x_2, x_3, x_4). Рассмотрим касательные подпространства к S^3 образованные всеми касательными к сфере векторами, ортогональными $\sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3}$. Является ли распределение этих двумерных плоскостей интегрируемым? Ответ обосновать.

Задача 11. Рассмотрим две контактные структуры на $S^1 \times \mathbb{R}^2$ с координатами (ψ, x, y), заданные 1-формами $dx - y d\psi$ и $dy + x d\psi$. Существует ли компактное лежандрово многообразие для обеих структур, проходящее через точку $(0, 2, 1)$? Если не существует – докажите, если существует – найдите.

Задача 12. Найти характеристическое направление в нехарактеристической точке гиперповерхности

$$F(u, q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) = 0.$$

Мы предполагаем, что в этой точке дифференциал dF не равен нулю.