

**НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 6.**  
**Интегрирование дифференциальных форм,**  
**метрика, форма объёма. 1.11.2022.**

**Задача 1.** Вычислить интеграл от формы  $\Omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$  по области  $D = \{-1 < u < 1, -1 < v < 1\}$  на поверхности  $x = u + v, y = u - v, z = uv$ .

Напомним, что если  $\iota : N \hookrightarrow M$  — подмногообразие, то под интегралом по  $N$  формы  $\omega \in \Omega(M)$  подразумевается интеграл по  $N$  формы  $\iota^* \omega$ .

**Задача 2.** Вычислить непосредственно и с помощью теоремы Стокса интегралы

- 1)  $\int_L \frac{y dx - x dy}{y^2}$ , где  $L$  ориентированный отрезок от точки  $(1, 2)$  до точки  $(2, 1)$  в  $\mathbb{R}^2$ ;
- 2)  $\oint_L -x^2 y dx + x y^2 dy$ , где  $L$  окружность  $x^2 + y^2 = R^2$  в  $\mathbb{R}^2$ , пробегаемая в положительном направлении.

**Задача 3.** Вычислить

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

для *любого* контура  $L$ . Как ответ соотносится с теоремой Стокса?

**Задача 4.** Найти на сфере  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  метрику, индуцированную стандартной метрикой на  $\mathbb{R}^3$ . Найдите с помощью найденной метрики на сфере угол между векторами  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  и  $\frac{\partial}{\partial \psi}$ , где  $\varphi, \psi$  — сферические координаты на сфере, в точке с координатами  $\varphi = \frac{\pi}{4}, \psi = \frac{\pi}{4}$ .

**Задача 5.** Найти форму объёма на двумерной сфере  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Найти площадь (двумерный объём) двумерной сферы  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

**Задача 6.** Доказать, что на  $n$ -мерном многообразии  $M$  существует дифференциальная  $n$ -форма, не обращающаяся ни в какой точке в ноль, тогда и только тогда, когда  $M$  ориентируемо.

**Задача 7\*.** Докажите, что форма объёма на единичной сфере  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  получается ограничением на неё формы

$$dV = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{n+1} \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1}),$$

где  $x^1, \dots, x^n$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Задача 8.** Обозначим через  $\mathbb{R}^{1,2}$  пространство  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $(t, x, y)$  и псевдоримановой метрикой  $g = dt^2 - dx^2 - dy^2$ . Введите аналог сферических координат на псевдосфере  $t^2 - x^2 - y^2 = 1$  и вычислите ограничение на псевдосферу  $g$  в этих координатах. Убедитесь, что  $-g$  является римановой метрикой.

Рассмотрим стереографическую проекцию верхней чашки псевдосферы из точки  $(0, 0, -1)$  на единичный диск в плоскости  $t = 0$ . Будем рассматривать координаты  $(x, y)$  на диске как координаты на псевдосфере. Вычислите риманову метрику на псевдосфере в этих координатах.

**Задача 9.** Отобразим верхнюю полуплоскость  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  на единичный круг с помощью отображения  $\varphi(z) = i \frac{z-i}{z+i}$ . Убедитесь, что  $\varphi$  — диффеоморфизм и вычислите метрику  $\varphi^*(g)$  на  $\mathcal{H}$ , где  $g$  — метрика из предыдущей задачи.

**Задача 10.** Можно ли для плотностей определить обратный образ при отображении?