НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 1.
Кривые и k-поверхности в $\mathbb{R}^n$, функции, касательные векторы. 6.09.2022.

Задача 1. Доказать, что $\mathrm{SO}(n)$ — неособая (то есть гладкая регулярная) поверхность (какой размерности?) в аффинном пространстве $n \times n$-матриц.

Задача 2. Найти касательное пространство $T_P\mathbb{S}^2$ к сфере $\mathbb{S}^2$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

в точке $P = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Задача 3. Пусть V — касательный вектор в точке P из предыдущей задачи, такой, что его координаты, соответствующие стереографической проекции из северного полюса равны $(1, 1)$. Найти координаты этого вектора, соответствующие стереографической проекции из южного полюса.

Задача 4. В условиях предыдущей задачи, пусть $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ограничение функции $x + y + z$ на сферу. Найдите $\partial_V f$.

Задача 5. Задать тор вращения как гиперповерхность $f(x, y, z) = 0$ в $\mathbb{R}^3$. Является ли эта поверхность неособой?

Задача 6. Пусть S гладкая k-мерная поверхность, и $d_p : S \longrightarrow \mathbb{R}$ функция, заданная формулой $d_p(x) = ||p - x||^2$, где p — фиксированная точка. Доказать, что в точках экстремума функции d_p вектор $p - x$ ортогонален S.

Задача 7. Доказать, что для любой прямой, перпендикулярной S в точке $q \in S$, существует не более k точек p таких, что $d_p(x)$ имеет q своей вырожденной критической точкой.

Задача 8. Будем говорить, что некоторая точка на плоской кривой является точкой перегиба, если в малой окрестности этой точки кривая лежит по обе стороны от касательной прямой в этой точке. Пусть кривая задана неявным уравнением $F(x, y) = 0$. Доказать, что если (x_0, y_0) — точка перегиба, то

$$\left(F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2\right)(x_0, y_0) = 0.$$

Задача 9. Сколько точек перегиба может быть у кубики (то есть в случае, когда $F(x, y)$ — полином степени 3 от x, y)?

Задача 10. Физики говорят, что «если $f(x, y, z) = 0$, то $\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} = -1$». Придайте смысл этому высказыванию.