НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях.
Повторный экзамен. 28.02.2023.

Экзамен будет домашним. Отсканированное решение (не забудьте написать свою фамилию!) надо не позднее, чем 7 марта прислать мне на электронную почту **в виде одного pdf файла.**

Для того, чтобы экзамен был засчитан, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами, кроме, может быть, одного, не менее 3 задач.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно».

Задача 1. Рассмотрим $U(n)$ как заданное естественным вложением подмногообразие в $\mathbb{C}^{n^2}$. Найти пересечение $U(n) \cap \mathfrak{u}(n)$ как подмногообразие в $\mathbb{C}^{n^2}$. (10 баллов).

Задача 2. Вычислить производную Ли 2-формы

$$y\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz + (x^2 + y^2 + z^2)dz \wedge dx$$

вдоль векторного поля $(x + y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (y + z^2)\frac{\partial}{\partial y} + (z + x^2)\frac{\partial}{\partial z}$. (5 баллов).

Задача 3. Вычислить

$$\int_M \omega = (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz,$$

где $M \subset \mathbb{R}^3$ является параметризованной кривой $x = a \sin^2 t$, $y = 2a \cos t \, \sin t$, $z = a \cos^2 t$, $0 \le t \le 2\pi$. (5 баллов).

Задача 4. Вычислить $\int\limits_M \omega$, где $\omega = \frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z}$ а $M \subset \mathbb{R}^3$ эллипсоид, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. (10 баллов).

Задача 5. Представить многообразие положительно определённых симметричных вещественных матриц порядка n как однородное пространство некоторой группы Ли. Какова его размерность? (10 баллов).

Задача 6. Найти все дискретные подгруппы в группе аффинных преобразований прямой $\mathbb{R}^1$. (5 баллов)

Задача 7. Доказать, что коммутативная связная группа Ли локально изоморфна векторному пространству. (10 баллов).

Задача 8. Пусть G компактная связная группа Ли. Доказать, что каждая точка $x \in G$ принадлежит некоторой однопараметрической подгруппе. (5 баллов).

Задача 9. Найти кольцо когомологий $\mathbb{RP}^n$ (то есть не только найти $H^i(\mathbb{RP}^n)$, но и понять, как устроено умножение в когомологиях). (5 баллов)

Задача 10. Найти когомологии двумерной сферы с μ вклеенными листами Мебиуса. (10 баллов).