

Правильные многогранники

Задача 3.1. Найдите полную группу изометрий, группу вращений а) правильной n -угольной пирамиды; б) правильной n -угольной призмы.

Задача 3.2. Докажите, что два противоположных ребра правильного икосаэдра образуют «золотой прямоугольник» (отношение сторон равно $(1 + \sqrt{5})/2 =: \phi$) и что 12 точек $(\pm\phi, \pm 1, 0)$, $(0, \pm\phi, \pm 1)$, $(\pm 1, 0, \pm\phi)$ расположены в вершинах правильного икосаэдра. (Это дает еще один способ доказать существование икосаэдра, а как следствие, и додекаэдра.)

Задача 3.3. Можно ли вписать правильный октаэдр в правильный додекаэдр так, чтобы каждая вершина октаэдра была вершиной додекаэдра?

Задача 3.4. Пусть правильный многогранник имеет символ Шлефли $\{p, q\}$, т. е. в каждой его вершине сходится q правильных p -угольников. Докажите, что $1/p + 1/q > 1/2$. Выведите отсюда, что любой правильный многогранник — одно из 5 платоновых тел.

Задача 3.5*. Докажите, что существует не более 6 правильных многогранников размерности 4 и выпишите их символы Шлефли¹.

Задача 3.6. Пусть s_i ($i = 1, \dots, n$) — отражения относительно гиперплоскостей, ортогональных векторам $e_{i-1} + e_i$ в $(n + 1)$ -мерном пространстве (с базисом e_0, e_1, \dots, e_n).

а) Найдите порядок элемента $s_i s_j$.

б) Сколько элементов в группе, порожденной всеми отражениями s_i ?

¹Символ Шлефли $\{p, q, r\}$ означает, что при каждом ребре сходятся r правильных многогранников с символом Шлефли $\{p, q\}$.