

## Правильные многогранники

**Задача 3.1.** Найдите полную группу изометрий, группу вращений а) правильной  $n$ -угольной пирамиды; б) правильной  $n$ -угольной призмы.

**Задача 3.2.** Докажите, что два противоположных ребра правильного икосаэдра образуют «золотой прямоугольник» (отношение сторон равно  $(1 + \sqrt{5})/2 =: \phi$ ) и что 12 точек  $(\pm\phi, \pm 1, 0)$ ,  $(0, \pm\phi, \pm 1)$ ,  $(\pm 1, 0, \pm\phi)$  расположены в вершинах правильного икосаэдра. (Это дает еще один способ доказать существование икосаэдра, а как следствие, и додекаэдра.)

**Задача 3.3.** Можно ли вписать правильный октаэдр в правильный додекаэдр так, чтобы каждая вершина октаэдра была вершиной додекаэдра?

**Задача 3.4.** Пусть правильный многогранник имеет символ Шлефли  $\{p, q\}$ , т. е. в каждой его вершине сходится  $q$  правильных  $p$ -угольников. Докажите, что  $1/p + 1/q > 1/2$ . Выведите отсюда, что любой правильный многогранник — одно из 5 платоновых тел.

**Задача 3.5\*.** Докажите, что существует не более 6 правильных многогранников размерности 4 и выпишите их символы Шлефли<sup>1</sup>.

**Задача 3.6.** Пусть  $s_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — отражения относительно гиперплоскостей, ортогональных векторам  $e_{i-1} + e_i$  в  $(n + 1)$ -мерном пространстве (с базисом  $e_0, e_1, \dots, e_n$ ).

а) Найдите порядок элемента  $s_i s_j$ .

б) Сколько элементов в группе, порожденной всеми отражениями  $s_i$ ?

---

<sup>1</sup>Символ Шлефли  $\{p, q, r\}$  означает, что при каждом ребре сходятся  $r$  правильных многогранников с символом Шлефли  $\{p, q\}$ .