4. ТЕОРЕМА БОКШТЕЙНА

Рассмотрим точную последовательность $0 \to A \xrightarrow{p} B \xrightarrow{q} C \to 0$, где A, B, C — комплексы R-модулей, а p, q — морфизмы комплексов. Напомним конструкцию отображений $\delta_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ (обозначения как в лекции 4; там же есть решение задачи 1^0 — посмотрите, если не слушали лекцию): пусть $x \in Z_n(C) = \operatorname{Ker} \partial_n^C$ — представитель класса гомологий $h \in H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$. В силу равенства $\operatorname{Im} q_n = C_n$ существует элемент $y \in B_n$ такой, что $q_n(y) = x$. В силу коммутативности диаграммы $q_{n-1}(\partial_n^B y) = \partial_n^C(q_n(y)) = \partial_n^C(x) = 0$, то есть $\partial_n^B(y) \in \operatorname{Ker} q_{n-1} = \operatorname{Im} p_{n-1}$ (в силу точности последовательности). Тем самым существует элемент $z \in A_{n-1}$ такой, что $p_{n-1}(z) = \partial_n^B(y)$.

Задача 1^0. Докажите, что $\partial_{n-1}^A z = 0$, то есть $z \in Z_{n-1}(A)$.

Тогда положим по определению $\delta_n(h) \in H_{n-1}(A) = Z_{n-1}(A)/B_{n-1}(A)$ — класс, содержащий элемент z.

Задача 2. Докажите, что класс $\delta_n(h)$ определен корректно, т.е. не зависит от выбора прообразов (y и z), использованных в его конструкции, и что построенное отображение $\delta_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ является гомоморфизмом модулей.

Морфизмы комплексов p и q порождают для всех $n \geq 0$ гомоморфизмы в гомологиях $p_{*,n} : H_n(A) \to H_n(B)$ и $q_{*,n} : H_n(B) \to H_n(C)$. Тем самым получается последовательность R-модулей и гомоморфизмов

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{p_{*,n}} H_n(B) \xrightarrow{q_{*,n}} H_n(C) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{p_{*,n-1}} \dots$$

Задача 3 (теорема Бокштейна)**.** а) Докажите, что эта последовательность — комплекс ($q_{*,n} \circ p_{*,n} = 0$, $\delta_n \circ q_{*,n} = 0$, $p_{*,n-1} \circ \delta_n = 0$). б) Докажите, что этот комплекс — точная последовательность (гомологии во всех местах равны нулю).

Задача 4. Пусть Γ — конечный граф, e — его ребро, и $\Gamma \setminus e$ — граф, полученный из Γ удалением ребра e (все вершины остаются на месте), $\iota : \Gamma \setminus e \to \Gamma$ — тавтологическое вложение. а) Придумайте комплекс R-модулей $\mathcal{E}$ и морфизм $\alpha : V(\Gamma, R) \to \mathcal{E}$ такой, что последовательность комплексов и морфизмов $0 \to V(\Gamma \setminus e, R) \xrightarrow{\iota_*} V(\Gamma, R) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E} \to 0$ — точная. б) Выпишите при $R = \mathbb{Z}$ соответствующую последовательность Бокштейна и докажите, что гомоморфизм $\alpha_{*,1} : H_1(V(\Gamma, \mathbb{Z})) \to H_1(\mathcal{E})$ либо нулевой, либо является эпиморфизмом $\mathbb{Z}^\ell \to \mathbb{Z}$. Вычислите в обоих случаях все группы ($\mathbb{Z}$-модули) и гомоморфизмы в последовательности Бокштейна. в) Какому геометрическому условию на ребро e соответствует $\alpha_{*,1} = 0$?