Гомотопические группы и гомотопический тип

Задача X.1. Пусть M — односвязное замкнутое трехмерное многообразие. Докажите, что существует отображение $S^3 \to M$ индуцирующее изоморфизм всех групп гомологий. (Из теорем Уайтхеда и Гуревича отсюда следует, что многообразие M гомотопически эквивалентно сфере S^3.)

Задача X.2. Как мы уже видели в листке 4, у пространств S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ все гомотопические группы изоморфны. Докажите, что они, тем не менее, гомотопически не эквивалентны.

Задача X.3. Приведите пример отображения из n-остова клеточного пространства X в пространство Y, для которого препятствие в группе $H^{n+1}(X, \pi_n Y)$ равно нулю, но которое не продолжается до отображения $(n+1)$-остова.

Задача X.4*. Докажите при помощи теории препятствий, что $K(\pi, n)$ (связное клеточное пространство, у которого $\pi_n = \pi$, а остальные гомотопические группы тривиальны) единственно с точностью до гомотопической эквивалентности.

▷ Мы уже видели в листке 3 примеры таких пространств: $S^1 = K(\mathbb{Z}, 1)$, $\mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$, $\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$. В задаче 4.10 обсуждалось, по сути, что $\Omega K(\pi, n) = K(\pi, n-1)$.

Задача X.5. а) Постройте свободное действие группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ на сфере S^∞. Докажите, что факторпространство по этому действию — пространство типа $K(\mathbb{Z}/n, 1)$.
б*) Вычислите гомологии этого пространства.

Задача X.6. Пространство n-элементных подмножеств $\mathbb{R}^\infty$ является пространством типа $K(S_n, 1)$.

Задача X.7. Пусть M — такое трехмерное многообразие, что группа $\pi_1(M)$ бесконечна, а $\pi_2(M) = 0$. Докажите, что это пространство типа $K(\pi, 1)$.

▷ Условие последней задачи выполнено, например, для $M = S^3 \setminus K$, где K — произвольный узел (бесконечность $\pi_1(S^3 \setminus K)$ — упражнение, тривиальность $\pi_2(S^3 \setminus K)$ — непростая теорема).