

Когомологии де Рама

▷ Это необязательных листок для людей, знакомых с началами анализа на многообразиях. Везде далее M — гладкое многообразие, H_{dR} — когомологии де Рама.

Задача 9А.1. Приведите явный пример а) замкнутой неточной 1-формы на S^1 ; б) замкнутой неточной 2-формы на $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Задача 9А.2. Вычислите когомологии де Рама n -мерного тора.

Задача 9А.3. Докажите, что $H_{dR}^0(M) \cong \mathbb{R}^{\pi_0(M)}$.

Задача 9А.4. а) Докажите, что если M односвязно, то $H_{dR}^1(M) = 0$.

б) Постройте инъективное отображение $H_{dR}^1(M) \rightarrow \text{Hom}(H_1(M), \mathbb{R})$.

(Указание: любой путь можно аппроксимировать гладким, а близкие пути гомотопны.)

▷ Это отображение является изоморфизмом. И вообще $H_{dR}^\bullet(M) \cong \text{Hom}(H_\bullet(M), \mathbb{R}) = H^\bullet(M; \mathbb{R})$.

Задача 9А.5. Постройте длинную точную последовательность Майера-Вьеториса когомологий де Рама для покрытия многообразия двумя открытыми подмножествами.

Задача 9А.6. Вычислите когомологии де Рама сферы S^n .

Задача 9А.7. Докажите, что конечнолистное накрытие $\pi: M \rightarrow N$ индуцирует вложение когомологий $\pi^*: H_{dR}^\bullet(N) \rightarrow H_{dR}^\bullet(M)$.