Комплексы и точные последовательности

▷ Все пространства в этом листке можно считать конечными клеточными (или даже симплициальными).

Задача 6.0. Вычислите гомологии а) окружности; б) тора при помощи последовательности Майера–Вьеториса.

Задача 6.1. а) Докажите, что комплекс векторных пространств[1] над полем k может быть получен как прямая сумма комплексов вида $0 \to k \xrightarrow{id} k \to 0$ и $0 \to k \to 0$.

б*) Докажите, что комплекс свободных абелевых групп конечного ранга может быть получен как прямая сумма комплексов вида $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to 0$ и $0 \to \mathbb{Z} \to 0$.

Задача 6.2. Зависит ли размерность векторного пространства $H_i(X;k)$ от выбора поля k?

Задача 6.3. Выведите из задачи 1, что если у CW-комплекса c_i клеток размерности i, то $\sum(-1)^i b_i = \sum(-1)^i c_i$, где $b_i = \dim H_i(X;k)$, а k некоторое фиксированное поле.

(Вместе с корректностью определения гомологий это дает корректность определения эйлеровой характеристики $\chi(X) := \sum(-1)^i c_i$.)

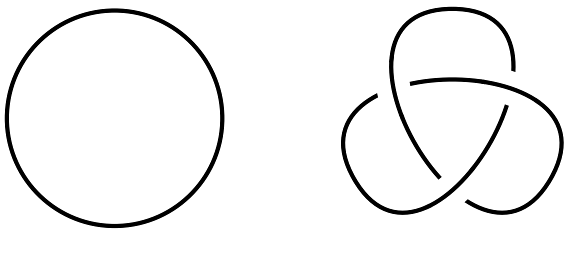
Задача 6.4. Если гомоморфизм 5-членных точных последовательностей является изоморфизмом во всех членах, кроме, быть может, среднего, то он является изоморфизмом и в среднем члене. (Из двух аналогичных проверок — инъективности и сюръективности f_3 — одна уже была сделана на лекции, сделайте вторую.)

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Задача 6.5. а) Отображение пар $(X, A) \to (Y, B)$ индуцирует гомотопические эквивалентности $X \to Y$ и $A \to B$. Докажите, что $H(X, A) \cong H(Y, B)$ и $\pi(X, A) \cong \pi(X, B)$.

б) Приведите пример таких клеточных пар (X, A) и (Y, B), что $X \approx Y$, $A \approx B$, но $H(X, A) \not\cong H(Y, B)$.

Задача 6.6*. Докажите при помощи последовательности Майера–Вьеториса, что гомологии дополнения к узлу не зависят от узла (ср. с задачей 7.9 прошлого семестра).



[1] Можно считать, что все пространства конечномерные (хоть это и не важно).