Независимый Московский Университет, осень 2020

Г.Б. Шабат,

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ КРИВЫХ-2

Лекция 5 (8 октября 2020)
Трансцендентные конструкции пространств модулей

В этой лекции мы работаем исключительно над $\Bbbk = \mathbb{C}$.

5.0. Алгебраические кривые и римановы поверхности

5.0.0. Две топологии, два пучка. Нам предстоит работать со сравнительно близкими понятиями: *алгебраическая кривая* и *риманова поверхность*. Придерживаясь *бурбакистских* принципов ([**Бурбаки1959**]), согласно которым (устоявшаяся) математика изучает *множества со структурами*, мы принимаем решение рассматривать наши структуры на одним и том же множестве.

Точнее, мы будем работать со множеством $\mathbf{X}$, называя его то *алгебраической кривой*, то *римановой поверхностью*; на нём будет рассматриваться две топологии

$$\mathcal{OP}^{\mathsf{alg}}(\mathbf{X}) \subset \mathcal{OP}^{\mathsf{an}}(\mathbf{X}),$$

где множество открытых по Зарискому множеств (пустое и дополнения к конечным) вкладываются в множество обычных открытых множеств связной компактной ориентируемой поверхности. Оба множества рассматриваются как малые категории с морфизмами-вклчениями.

Каждой из этих топологий сопоставляется *структурный пучок*; иначе говоря, имеем два кофунктора

$$\mathcal{O}_{\mathbf{X}}^{\mathsf{alg}} : \mathcal{OP}^{\mathsf{alg}}(\mathbf{X}) \longrightarrow\!\!\!\longrightarrow \mathbb{C}\text{-}ALG$$

и

$$\mathcal{O}_{\mathbf{X}}^{\mathsf{alg}} : \mathcal{OP}^{\mathsf{an}}(\mathbf{X}) \longrightarrow\!\!\longrightarrow \mathbb{C}\text{-}ALG,$$

сопоставляющих каждому открытому множеству на $\mathbf{X}$ алгебру регулярных (для каждого пучка в своём смысле) функций на этом множестве.

Конструкции могут показаться весьма непохожими друг на друга. Так, одна топология классична и привычна, а другая нехаусдорфова, в которой все открытые множества всюду плотны. $\mathbb{C}$-алгебры, фигурирующие в *алгебраическом* пучке, конечно порождены и, как правило, различны (изоморфны их поля частных), а в *аналитическом* это (за небольшим количеством исключений) по теореме Римана *о конформном отображении* – алгебры, изоморфные алгебре сходящихся степенных рядов в единичном круге.

Тем не менее, объекты, связанные с обоими подходами, весьма близки. Например, естественны были бы очевидные обозначения $\mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathcal{O}^+)^{\mathsf{alg}}$ и $\mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathcal{O}^+)^{\mathsf{an}}$ – но мы ими пользоваться не будем, поскольку эти группы канонически изоморфны, так что мы сохраним обозначение $\mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathcal{O}^+)$ за обоими. Приведённый пример – частный случай общего принципа GAGA ([**Serre1956**]).

В дальнейшем, если нам будет нужно подчеркнуть одну из двух точек зрения на нашу кривую/поверхность $\mathbf{X}$, мы будем пользоваться обозначениями $\mathbf{X}^{\mathsf{alg}}$ и $\mathbf{X}^{\mathsf{an}}$.

5.0.1. Теорема существования Римана. Очевидным образом комплексная алгебраическая кривая наделяется структурой римановой поверхности – см. [**Шафаревич2007**]. Найти алгебро-геометрическую структуру на римановой поверхности несколько труднее. Впрочем, использование достаточно продвинутой техники позволяет обосновать такую возможность довольно кратко.

Рассмотрим на $\mathbf{X}^{\mathsf{an}}$ короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{O}} \longrightarrow 0, \tag{5.0.1a}$$

где $\mathcal{O}$ – пучок ростков голоморфных функций, $\mathcal{M}$ – пучок ростков *мероморфных*. Фактор-пучок $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{O}}$ называется *пучком главных частей* и допускает следующую интерпретацию: в достаточно малой координатной окрестности с локальным параметром z любая мероморфная функция представляется рядом Лорана $a_{-k}z^{-k} + \ldots a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z + \ldots$, и *главная часть такой функции* – конечный отрезок этого ряда

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_k}{z^k}.$$

(Аддитивная) *проблема Кузена* в нашей ситуации заключается в построении на римановой поверхности мероморфной функции *с заданными главными частями*; отрезок точной когомологической последовательности, соответствующей короткой (5.0.1a),

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbf{X}^{\mathsf{an}}, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{H}^0\left(\mathbf{X}^{\mathsf{an}}, \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{O}}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbf{X}^{\mathsf{an}}, \mathcal{O}) \longrightarrow \ldots \tag{5.0.1b}$$

показывает, что *препятствие к решению проблемы Кузена лежит в группе* $\mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathcal{O})$. Если откуда-то знать[1], что на римановой поверхности $\mathbf{X}$ рода g

$$\dim \mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathcal{O}) = g,$$

и ограничиться главными частями вида $\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_n}$ в точках $P_1, \dots, P_n \in \mathbf{X}$, то последовательность (5.0.1b) показывает, что *проблема Кузена разрешима при* $n > g$, то есть

на $\mathbf{X}$ *существует мероморфная функция с простыми полюсами (только) в* n *произвольных точках, если* $n > g$.

Замечание. На $\mathbf{X}^{\mathsf{alg}}$ мы это знаем из теоремы Римана-Роха.

Под *теоремой существования Римана* понимаются несколько разных утверждений – см. обзор в [**Harbater2015**]. Их сближает общий принцип, который мы сформулируем несколько туманно:

В размерности 1 всё компактное комплексно-аналитическое алгебраично. ($\bigstar$)

Перейдём к точным интерпретациям этого принципа.

Теорема. *Поле* $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ *мероморфных функций на компактной римановой поверхности* $\mathbf{X}$ *является конечнопорождённым расширением поля* $\mathbb{C}$ *степени трансцендентности* 1.

Доказательство. Неравенство $\mathrm{degtr}_{\mathbb{C}}\mathcal{M}(\mathbf{X}) \geq 1$ установлено выше (проблема Кузена). Для установления равенства $\mathrm{degtr}_{\mathbb{C}}\mathcal{M}(\mathbf{X}) = 1$ достаточно показать, что любые две мероморфные функции $x, y \in \mathcal{M}(\mathbf{X})$ алгебраически зависимы.

Выберем две такие функции и рассмотрим мероморфное отображение

$$x \times y : \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

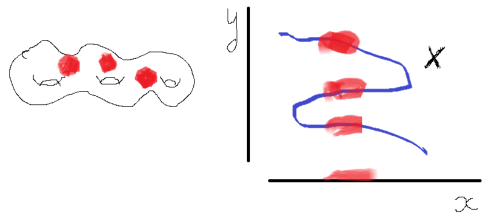
Будем считать, что x непостоянна (иначе утверждение тривиально) и выберем *некритическое* значение $x_0 \in \mathbb{C}$ – это значит, что $x_0 = x(P)$, где $P \in \mathbf{X}$ (само собой!) не полюс x и $\mathrm{d}x\big|_P \neq 0$.

Тогда для достаточно малой окрестности $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - x_0| < \varepsilon\}$ прообраз $x^{-1\circ}(U) \subset \mathbb{C}$ – несвязное объединение конечного множества топологических дисков

$$x^{-1\circ}(U) = V_1 \coprod \cdots \coprod V_n,$$

ограничение x на каждый из которых – гомеоморфизм.

[1] классический учебник по римановым поверхностям, содержащий "физические"интерпретации объектов – [**Спрингер1960**]



Обозначим обратные биголоморфные отображения

$$y_i : U \longrightarrow V_i$$

и заметим, что коэффициенты многочлена

$$(y - y_1) \dots (y - y_n) =: y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n$$

– мероморфные (и, следовательно, рациональные) функции от x. Последнее равенство выполняется на $x^{-1\circ}(U)$ – но, следовательно, согласно ТФКП, и на всём $\mathbf{X}$.

Остаётся установить *конечнопорождённость* расширения $\mathcal{M}(\mathbf{X}) \supset \mathbb{C}$

Нами установлена цепочка расширений

$$\mathcal{M}(\mathbf{X}) \supseteq \mathbb{C}(x, y) \supseteq \mathbb{C}(x).$$

Здесь $[\mathbb{C}(x, y) : \mathbb{C}(x)] = n$, но надо признаться, что приведённый рисунок имеет буквальный смысл лишь при $\mathcal{M}(\mathbf{X}) = \mathbb{C}(x, y)$. В случае рода >1 это предположение выполняется для "общих" $\mathbf{X}, x, y$ (*из общей кривой рода >1 нет нетривиальных морфизмов на кривые положительного рода*), но в специальных случаях возможны нетривиальные расширения $\mathcal{M}(\mathbf{X}) \supset \mathbb{C}(x, y)$, и надо установить их конечность. Случаи рациональных и эллиптических $\mathbf{X}$ можно рассмотреть отдельно, а для больших родов можно либо учесть конечность возможностей промежуточных накрытий, рассматривая их роды, либо воспользоваться *теоремой о примитивном элементе.*■

Следствие. *Категории полных связных гладких комплексных кривых $\mathcal{CRV}/\mathbb{C}$ и компактных римановых поверхностей $\mathcal{RIEMSURF}$ эквивалентны.*

Замечание. И одномерность, и компактность, входящие в формулировку принципа (★), существенны. Общие компактные торы $\frac{\mathbb{C}^2}{\Lambda}$ (где Λ решётка) неалгебраичны. На проколотой римановой поверхности есть голоморфные функции с существенными особенностями в проколах.

Приведённые результаты позволят нам отождествлять уже освоенные <u>множества</u> $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$ с *множествами* (в очевидных обозначениях)

$$\frac{\mathcal{RIEMSURF}_g}{\simeq}.$$

Но структуры на этих новых множествах нам встретятся разные. То же касается множеств $\mathcal{M}_{g,N}(\mathbb{C})$, $\widehat{\mathcal{M}_g}(\mathbb{C})$ и $\overline{\mathcal{M}_g}(\mathbb{C})$.

5.1. Униформизация

Этот раздел лишён содержания при $g = 0$. Мы опустим также содержательный случай $g = 1$, тщательно освещённый в огромном количестве источников, например, в [**ГурвицКурант1968**].

5.1.0. Фундаментальные группы. Мы будем пользоваться стандартными понятиями (см., например, [**Хатчер2011**]), слегка адаптированными для наших нужд.

Обозначим
$$\mathcal{TOP}^\bullet := \{\{(\mathbf{X}, *) \mid \mathbf{X} \in\in \mathcal{TOP}, * \in \mathbf{X}\}\}$$
категорию топологических пространств с отмеченной точкой, или *пунктированных* пространств.

Определён функтор
$$\pi_1 : \mathcal{TOP}^\bullet \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{GRP} : (\mathbf{X}, *) \mapsto\mapsto \pi_1(\mathbf{X}, *),$$
сопоставляющий каждому пунктированному пространству группу гомотопических классов петель с началом и концом в отмеченной точке.

Необходимость фиксировать и обозначать отмеченные точки, а затем следить за ними при обозначениях – неприятное осложнение, сопровождающее приведённое прямолинейное определение фундаментальной группы[2]. Чтобы избавиться от этого осложнения, введём категорию, общепринятого названия и обозначения для которой, видимо, не существует – *групп и классов сопряжённости их морфизмов.* Мы будем работать с этой категорией только в настоящей лекции и особо изощрённых обозначений вырабатывать не будем.
$$\underline{\mathcal{GRP}} := \{\{G \mid G \in\in \mathcal{GRP}\}\}$$
(то есть объекты этой категории – просто группы).

Для любых $G, H \in \underline{\mathcal{GRP}}$ на множестве морфизмов $\mathrm{Mor}_{\mathcal{GRP}}(G, H)$ действует группа $G \times H$: для для элементов $g \in G, h \in H$ и морфизма $f : G \to H$
$$(g, h) \cdot f : x \mapsto hf(g^{-1}xg)h^{-1}$$
Теперь можно определить
$$\mathrm{Mor}_{\underline{\mathcal{GRP}}}(G, H) := \frac{\mathrm{Mor}_{\mathcal{GRP}}(G, H)}{G \times H}$$

[2]Довольно распространённый способ преодолеть это рассуждение – переход к *фундаментальным группоидам* – см. [**Brown1968**]. Мы этот подход развивать не будем

и назвать $G \times H$-эквивалентные морфизмы групп $G \to H$ *сопряжёнными.*

Определён тождественный на объектах *полный*[3] функтор

$$\mathrm{conj.class} : \mathcal{GRP} \longrightarrow\!\!\!\!\longrightarrow \underline{\mathcal{GRP}},$$

сопоставляющий каждому морфизму групп класс его сопряжённости.

Дальнейшие конструкции имеют смысл лишь для *достаточно хороших* топологических пространств. Обозначим

$$\mathcal{TOP}^{\bullet}[\mathrm{path.conn}] \text{ и } \mathcal{TOP}[\mathrm{path.conn}]$$

полные подкатегории *линейно связных* пунктированных и обычных топологических пространств.

Теорема. *Определена коммутативная диаграмма функторов*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{TOP}^{\bullet}[\mathrm{path.conn}] \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\mathrm{forget}"'] & \mathcal{GRP} \arrow[d, "\mathrm{conj.class}"] \\
\mathcal{TOP}[\mathrm{path.conn}] \arrow[r, "\underline{\pi_1}"'] & \underline{\mathcal{GRP}}
\end{tikzcd}$$

в которой функтор forget *забывает отвеченную точку, а функтор* $\underline{\pi_1}$ *сопоставляет линейно связному топологическому пространству* $\mathbf{X}$ *фундаментальную группу* $\pi_1(\mathbf{X}, *)$, *построенную по точке* $* \in \mathbf{X}$, *выбранной произвольно.*

Доказательство. Предлагается провести в задаче 5.2. ■

5.1.1. Подгруппы фундаментальной группы и накрытия. Далее мы будем работать не только с линейно связными, но и с *локально связными* и с *локально односвязными* топологическими пространствами. Не вдаваясь в детали (см. [**Хатчер2011**]), будем называть такие пространства *достаточно хорошими*; для наших целей достаточно знать, что все топологические пространства достаточно хороши.

Чтобы не загромождать язык, мы не будем вводить новых обозначений для категорий и ограничимся их словесными упоминаниями.

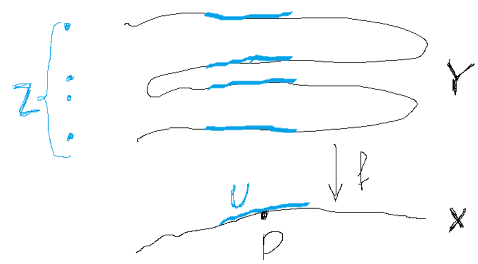
Определение. Непрерывное отображение (достаточно хороших) топологических пространств $f : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ называется[4] *накрытием*, если существует такое дискретное топологическое пространство $\mathbf{Z}$, что у любой точки $P \in \mathbf{X}$ найдётся

[3] то есть сюръективный на множестве морфизмов

[4] мы будем опускать слово *неразветвлённым*

окрестность $\mathbf{U} \ni P$, для которой

$$f^{-1\circ}(\mathbf{U}) \simeq \mathbf{U} \times \mathbf{Z}.$$



Теорема. *(а) Если $f : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ – накрытие, то индуцированный класс сопряжённости морфизмов групп*

$$f_* : \underline{\pi_1}(\mathbf{Y}) \longrightarrow \underline{\pi_1}(\mathbf{X})$$

состоит из мономорфизмов.

(б) Если при этом имеет место нормальность подгруппы

$$f_*\big(\underline{\pi_1}(\mathbf{Y})\big) \triangleleft \underline{\pi_1}(\mathbf{X}),$$

(в этом случае исчезает необходимость говорить о классах сопряжённости групп и морфизмов) *то определено естественное свободное действие фактор-группы*

$$\Gamma := \frac{\underline{\pi_1}(\mathbf{X})}{f_*\big(\underline{\pi_1}(\mathbf{Y})\big)}$$

на пространстве $\mathbf{Y}$, и имеет место естественный гомеоморфизм

$$\mathbf{X} \cong \frac{\mathbf{Y}}{\Gamma}.$$

Доказательство. В несколько других терминах сравнительно общеизвестно, см. [**Хатчер2011**]. ■

Следствие. *Классы* (очевидным образом определяемой) *изоморфности накрытий достаточно хорошего топологического пространства находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с классами сопряжённости подгрупп его фундаментально группы.*

5.1.2. Универсальные накрывающие. Применив только что сформулированное следствие к одному из его крайних случаев, к единичной подгруппе фундаментальной группы, получаем следующий важный и нетривиальный результат:

Любое достаточно хорошее топологическое пространство $\mathbf{X}$ гомеоморфно фактору некоторого односвязного пространства по свободному действию фундаментальной группы $\underline{\pi_1}(\mathbf{X})$.

Это односвязное пространство и называется *универсальной накрывающей* пространства $\mathbf{X}$ и обозначается $\widetilde{\mathbf{X}}$. Согласно результатам предыдущего подраздела, оно снабжено свободным действием действием группы $\underline{\pi_1}(\mathbf{X})$ и гомеоморфизмом

$$\boxed{\mathbf{X} \simeq \frac{\widetilde{\mathbf{X}}}{\underline{\pi_1}(\mathbf{X})}} \qquad (5.1.2a)$$

(Мы не обсуждаем функториальных свойств операции $\mathbf{X} \mapsto\!\!\!\mapsto \widetilde{\mathbf{X}}$ перехода к универсальной накрывающей, поскольку это потребовало бы учёта отмеченных точек, от чего мы отказались. Аккуратные формулировки требуют оговорок *с точностью до сопряжения...*).

Различные структуры на пространствах и их универсальных накрывающих передаются в обоих направлениях. Из них нас больше всего интересует *комплексная структура.* В комплексной размерности 1 изоморфизм (5.1.2a) представляет собой совершенно уникальное явление.

В бо́льших размерностях изоморфизм (5.1.2a) не имеет серьёзных приложений к классификации комплексно-аналитических многообразий, поскольку класс *односвязных* многообразий совершенно необозрим – см, например, [**Шабат1977**]. В одномерной же теории по *теореме Римана о конформных отображениях* (см. [**Хованский2007**]) всего три односвязных многообразия – риманова сфера $\mathbf{P}_1(\mathbb{C})$, комплексная "прямая" $\mathbb{C}$ и (главное) *верхняя полуплоскость*

$$\mathcal{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$$

могут служить универсальными накрывающими ВСЕХ римановых поверхностей.

При этом в двух случаях из трёх дискретные свободно действующие группы преобразований легко перечисляются. Сфера $\mathbf{P}_1(\mathbb{C})$ универсально накрывает только себя, "прямая" $\mathbb{C}$ – только себя, проколотую себя и торы (последний случай содержателен, но мы решили его пропустить). Остальные случаи называются *гиперболическими*[5], и именно к ним, то есть к изучению факторов

$$\frac{\mathcal{H}}{\Gamma}$$

верхней полуплоскости по свободно действующим группам биголоморфных автоморфизмов, относится основная часть теории римановых поверхностей.

Группа *всех* биголоморфных автоморфизмов верхней полуплоскости – это

$$\mathrm{Aut}\mathcal{H} \simeq \mathsf{PSL}_2(\mathbb{R}),$$

элементы которой $\pm \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ действуют на верхней полуплоскости дробно-линейными преобразованиями

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

[5]Достаточное условие гиперболичности одномерного комплексного многообразия $\mathbf{X}$ – *некоммутативность* фундаментальной группы $\underline{\pi_1}(\mathbf{X})$. Оно же является необходимым, если исключить кольца и проколотые диски.

Действие без неподвижных точек в терминах группы $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$ определяется очень просто: элемент $\gamma = \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется *эллиптическим*, если[6] выполняется неравенство $(\mathrm{tr}\gamma)^2 < 4$. Подгруппа группы $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$ действует на $\mathcal{H}$ *свободно* тогда и только тогда, когда не содержит эллиптических элементов – доказать это предлагается в задаче **5.3**.

Подведём итог. Он содержит потенциал классификации необозримого класса объектов, намного превосходящего класс интересующих нас, и мы в дальнейшем будем использовать лишь его небольшую часть.

Теорема. *Для любого гиперболического комплексно-аналитического одномерного многообразия* $\mathbf{X}$ *найдётся такая дискретная подгруппа* $\Gamma \subset \mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$ *без эллиптических элементов, что* $\Gamma \simeq \underline{\pi_1}(\mathbf{X})$ *и*

$$\mathbf{X} \simeq \frac{\mathrm{H}}{\Gamma}.$$

5.1.3. Нормализаторы и автоморфизмы. Напомним, что *нормализатор подгруппы* $H \subset G$ – это

$$\mathrm{N}_G H := \{g \in G \mid gH = Hg\}.$$

Очевидно, $\mathrm{N}_G H \subseteq G$ – подгруппа и $H \triangleleft \mathrm{N}_G H$.

Предложение. *Пусть* $\Gamma \subset \mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$ *– дискретная подгруппа без эллиптических элементов. Тогда определён морфизм фактор-группы*

$$\frac{\mathrm{N}_{\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})}\Gamma}{\Gamma} \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(\frac{\mathcal{H}}{\Gamma}\right),$$

задающий действие нормализатора по формуле

$$[\alpha]_\Gamma \cdot [\tau]_\Gamma := [\alpha \cdot \tau]_\Gamma.$$

Доказательство. Прямая проверка $\blacksquare$.

Это предложение – один из немногих способов идентифицировать <u>компактные</u> факторы верхней полуплоскости по дискретным группам (*некоторые алгебраические кривые рода >1 однозначно* восстанавливаются по своим группам автоморфизмов). Примеры вскоре будут приведены.

В задачах **5.4** и **5.5** разбирается противоположное, <u>не</u>алгебраическое явление: предлагается рассмотреть случаи факторов верхней полуплоскости с <u>непрерывными</u> группами автоморфизмов.

В дальнейшем мы будем заниматься только алгебраическими факторами верхней полуплоскости. Для их выделения полезной окажется PSL_2 -инвариантная метрика

$$-\frac{\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\overline{\tau}}{(\tau - \overline{\tau})^2}$$

[6]элементы группы $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$ как матрицы определены с точностью о знака, поэтому их следы не определены, а квадраты следов – определены.

и ассоциированная с ней форма площади. Рекомендуется задача **5.6**.

5.2. Пространство Тайхмюллера

5.2.0. Representation varieties[7]. Пусть Γ – конечнопорождённая группа. С ней, очевидно, связано вещественное аффинное многообразие

$$\mathrm{rep}_\Gamma := \mathrm{Mor}_{\mathcal{GRP}} \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^n,$$

где n – количество образующих в Γ, а уравнения отражают соотношения (разумеется, вместо $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ может фигурировать любая группа Ли).

Результаты раздела **5.1.2** побуждают для каждой группы Γ, которая может свободно действовать в $\mathcal{H}$, ввести множество[8]

$$\mathcal{T}_\Gamma := \frac{\{(\mathbf{X}, \iota) \mid \mathbf{X} \text{ – гиперболическое 1-мерное многообразие } \iota : \underline{\pi_1}(\mathbf{X}) \xrightarrow{\simeq} \Gamma}{\approx}$$

где изоморфизм $\simeq$ в числителе понимается в категории $\underline{\mathcal{GRP}}$, а изоморфизм $\approx$ в знаменателе определяется очевидным образом.

Из теоремы раздела **5.1.2** следует, что имеет место вложение

$$\mathrm{t}_\Gamma : \mathcal{T}_\Gamma \hookrightarrow \frac{\mathrm{rep}_\Gamma}{\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})},$$

где $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$ действует на морфизмах сопряжениями.

Образ $\mathrm{t}_\Gamma(\mathcal{T}_\Gamma)$ состоит из классов таких <u>инъективных</u> $\mu : \Gamma \to \mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$, что группа $\mu(\Gamma)$ <u>дискретна</u> и не содержит эллиптических элементов. Неудивительно, что трудна проверка дискретности: странно, что такая естественная область алгебраической геометрии, как изучение аффинных многообразий rep_Γ, находится практически на начальной стадии развития, см., например, [**LubMag1985**].

5.2.1. Снова размерность $\mathcal{M}_g$. Наш курс пересекается с этой трудной и интересной математикой лишь по одной серии групп. Мы ограничимся эвристическим подтверждением формулы размерности пространств модулей. Обозначим

$$\Pi_g := \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle$$

фундаментальную группу топологической поверхности рода g. Тогда, очевидно, при $g > 1$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{rep}_{\Pi_g} = 6g - 3$$

(одно матричное уравнение на $2g$ матриц). Факторизаций по сопряжению даст

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{T}_{\Pi_g} = 6g - 6,$$

что и требовалось.

Чтобы придать этому вычислению строгость, надо развить теорию *деформаций*

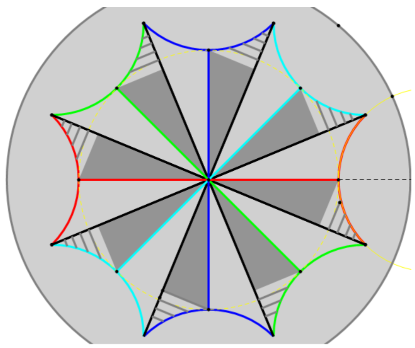
---

[7]К сожалению, дословный перевод *многообразие представлений* имеет в русскоязычной литературе другое значение, см. [**Плоткин1977**].

[8]Буква $\mathcal{T}$ объясняется тем, что рассматриваемое множество можно было бы назвать *пространством Тайхмюллера* группы. Вскоре будет введено обычное определение пространства Тайхмюллера.

дискретных подгрупп групп Ли. Она была построена А. Вейлем в [**Weil1960**], см. подробное изложение в [**Рагунатан1977**].

5.2.2. Пример: правильный гиперболический 8-угольник. Остаётся убедиться, что множество требуемых дискретных групп непусто. Пример доставляет правильный гиперболический 8-угольник, копиями которого замощается плоскость Лобачевского. Для этого он должен состоять из 16 треугольничков с углами $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$.



Детали см. в [**Каток2002**].

5.2.3. Пространство дифференциалов Бельтрами. Напомним, как на римановой поверхности $\mathbf{X}$ при наличии атласа

$$\mathbf{X} = \bigcup_{i \in I} U_i,\ \ z_i : U_i \hookrightarrow \mathbb{C}$$

описываются голоморфные и *гладкие* (у последних нет алгебро-геометрических аналогов) сечения линейных расслоений. Например, *голоморфное векторное поле* записывают в виде $v_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, имея в виду, что на всех пересечениях имеет место равенство

$$v_i \frac{\partial}{\partial z_i} = v_j \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Эта симметричная и ясная[9] запись всё-таки требует расшифровки – увы, разрушающей симметрию: для всех $k \in I$ определены

$$f_k \in \mathcal{O}(U_k),$$

и для всех $i, j \in I$ выполняются равенства обычных *голоморфных функций*

$$v_i\big|_{U_{ij}} = v_j\big|_{U_{ij}} \frac{\partial z_i}{\partial z_j}.$$

Аналогичный смысл имеют равенства $f_i \mathrm{d}z_i = f_j \mathrm{d}z_j$ для абелевых дифференциалов, $\eta_i (\mathrm{d}z_i)^2 = \eta_j (\mathrm{d}z_j)^2$ для квадратичных и т. п.

Мы так подробно об этом пишем, потому что про *дифференциалы Бельтрами*

[9]если не пользоваться "традиционной" $v_i(z_i) \frac{\partial}{\partial z_i}$

часто можно прочитать, что это – такого же рода выражения с инвариантными

$$\mu_i \frac{\partial \overline{z_i}}{\partial z_i},$$

а это уже не так ясно.

В обычном тензорном контексте, однако, ничего непостижимого в этой записи нет: рассмотрим для фиксированного покрытия и для $m, n \in \mathbb{Z}$ имеющие указанный выше смысл выражения

$$\{A_i(\mathrm{d}z_i)^m(\mathrm{d}\overline{z}_i)^n\} =: \mathrm{T}^{m,n}\mathbf{X}$$

Возникает биградуированная алгебра

$$\mathrm{T}^{m',n'} \times \mathrm{T}^{m'',n''} \to \mathrm{T}^{m'+n',m''+n''},$$

в которой особую для нас роль играет *компонента Бельтрами*

$$\mathrm{BEL}(\mathbf{X}) := \mathrm{T}^{-1,1}\mathbf{X}$$

вместе со спариванием

$$\mathrm{T}^{-1,1} \times \mathrm{T}^{2,0} \to \mathrm{T}^{1,1},$$

задающим двойственность между дифференциалами Бельтрами и квадратичными дифференциалами:

$$\mathrm{BEL}(\mathbf{X}) \times \mathrm{Q}(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbb{C} : (\mu, q) \mapsto \int\int_{\mathbf{X}} \mu q.$$

***

Дифференциалы Бельтрами не являются наборами скалярных функций, поскольку при переходе с карты на карту "скручиваются". Однако их *модули* $|\mu_i|$ не зависят от карт, и поэтому пространство дифференциалов Бельтрами $\mathrm{BEL}(\mathbf{X})$ – это *комплексное Банахово пространство!*

Исключительно важную роль в теории пространств Тайхмюллера и пространств модулей играет *единичный шар* в этом пространстве:

$$\mathrm{BEL}_1(\mathbf{X}) := \{\mu \in \mathrm{BEL}(\mathbf{X}) \mid ||\mu||_\infty < 1\}.$$

Забегая вперёд: определено *унитарное* представление группы $\mathsf{Diff}^+(\mathbf{X})$ в этом пространстве, и

$$\boxed{\mathcal{M}_g(\mathbb{C}) \simeq \frac{\mathrm{BEL}_1(\mathbf{X})}{\mathsf{Diff}^+(\mathbf{X})}}$$

Дифференциалы Бельтрами, которые мы дальше будем рассматривать как наборы *гладких* функций $\{\mu_i\}$ на картах выделенного покрытия, имеют две стандартные тензорные интерпретации:

(a) На <u>той же</u> поверхности $\mathbf{X}$ строятся структурные пучки $\mathcal{O}_\mu$, определяемые *деформированными* уравнениями Коши-Римана

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}} - \mu_i \frac{\partial}{\partial z_i} = 0.$$

Нетрудно показать, что так получаются <u>все</u> кривые данного рода.

(б) Будем обозначать *конформный класс* метрик традиционно: в каждой карте недеформированная метрика записывается в виде

$$(\mathrm{d}s)^2 = \mathrm{d}z_i \mathrm{d}\overline{z_i},$$

а коэффициент пропорциональности подразумевается. В этих обозначениях μ-деформированная метрика задаётся формулой

$$(\mathrm{d}s)^2 = |\mathrm{d}z_i + \mu_i \mathrm{d}\overline{z_i}|^2.$$

Эта структура может быть изображена системой *концентрических эллипсов* в каждой касательной плоскости к римановой поверхности.

***

Действие группы диффеоморфизмов на этих системах эллипсов определяется очевидным геометрическим образом, точные формулы см. в [**ImaTan1992**].

Известны следующие стандартные способы строить дифференциалы Бельтрами.

(А) Если

$$\Psi : \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{Y}$$

– сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, а $w_j : V_j \hookrightarrow \mathbb{C}$ – голоморфный атлас, то набор

$$\frac{\frac{\partial(\Psi^* w_j)}{\partial \overline{z}_i}}{\frac{\partial(\Psi^* w_j)}{\partial z_i}}$$

даёт коэффициенты дифференциала Бельтрами, не зависящие от выбора w_i. Этим способом можно получить <u>все</u> дифференциалы Бельтрами на данной поверхности.

(Б) Центральный с точки зрение теории Тайхмюллера способ, но при $g \neq 1$ с конечным количеством *особенностей* (неопределённостей).

Если $\eta \in \mathrm{Q}(\mathbf{X}) \setminus \{0\}$ – ненулевой квадратичный дифференциал, а вещественное число $k \in \mathbb{R}$ удовлетворяет $0 < k < 1$, то

$$\mu = k \frac{\overline{\eta}}{|\eta|}$$

– дифференциал Бельтрами, определённый <u>вне</u> нулей дифференциала η. Такие дифференциалы задают *экстремальные* квазиконформные отображения, см., например, [**ImaTan1992**].

(В) Если (в классической записи, о которой мы договаривались)

$$\left\{ v_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right\}$$

– глобальное векторное поле (с гладкими коэффициентами), то совокупность

$$\left\{ \frac{\partial v_i}{\partial \overline{z}_i} \right\}$$

представляет собой набор коэффициентов дифференциала Бельтрами, называемого *инфинитезимально тривиальным.*

Этот термин объясняется тем, что инфинитезимально тривиальные дифференциалы ортогональны квадратичным в смысле указанного выше спаривания: очевидно, во введенных обозначениях

$$\eta \frac{\partial v_i}{\partial \overline{z}_i} = \mathrm{d}(\eta v_i)$$

5.2.4. Диффеоморфизмы глобально и инфинитезимально. Проще всего описать дифференциалы Бельтрами ещё одним способом. Один из *конформных* инвариантов римановой метрики на *ориентированной* поверхности – *почти комплексная структура*: поворот

$$J_P : \mathrm{T}_P\mathbf{X} \longrightarrow \mathrm{T}_P\mathbf{X}$$

на 90° против часовой стрелки в каждом касательном пространстве. Диффеоморфизм $\Psi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ действует на таких структурах очевидным образом:

$$(\Psi \cdot J) \cdot \partial := (\Psi_*)^{-1\circ} \circ J \circ \Psi_*$$

При переходе к дифференциалам Бельтрами это даст прежнее определение, и мы снова определили Банахово представление группы диффеоморфизмов $\mathsf{Diff}^+(\mathbf{X})$. Теперь мы выделим связную компоненту единицы этой группы

$$\mathsf{Diff}_0^+(\mathbf{X}) \triangleleft \mathsf{Diff}^+(\mathbf{X})$$

(диффеоморфизмы, гомотопные тождественному), и определим два связанных между собой объекта:*пространство Тайхмюллера*

$$\boxed{\mathcal{T}_g(\mathbb{C}) \simeq \frac{\mathrm{BEL}_1(\mathbf{X})}{\mathsf{Diff}_0^+(\mathbf{X})}}$$

и (снова) наш главный объект: *пространство модулей*

$$\boxed{\mathcal{M}_g(\mathbb{C}) \simeq \frac{\mathrm{BEL}_1(\mathbf{X})}{\mathsf{Diff}^+(\mathbf{X})}}$$

Инфинитезимально диффеоморфизмы действуют на дифференциалы Бельтрами векторными полями. Возникает короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathrm{BEL} \longrightarrow \frac{\mathrm{BEL}}{\mathcal{T}} \longrightarrow 0,$$

точная когомологическая последовательность которой снова приводит к изоморфизму Кодаиры-Спенсера

$$\boxed{\mathrm{T}_{\mathbf{X}}\mathcal{T}_g \cong \mathrm{H}^1(\mathbf{X}, \mathrm{T})}$$

Этот же изоморфизм для пространств модулей требует орбиобразных уточнений.

5.2.5. Модулярная группа. Одна из целей наших главных рассмотрений – новая, чисто комбинаторная интерпретация когомологий пространств модулей. На первый план выходит группа

$$\boxed{\mathsf{Mod}_g := \frac{\mathsf{Diff}^+(\mathbf{X})}{\mathsf{Diff}_0^+(\mathbf{X})}}$$

Главная пара теории–

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_g \arrow[d, "/\mathsf{Mod}_g"] \\ \mathcal{M}_g(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Сама модулярная группа – группа гомотопических классов гомеоморфизмов замкнутых поверхностей – давно и интенсивно изучается см., например, учебник [**FarbMargalit2012**].

Группа Mod_g действует на стягиваемом пространстве Тайхмюллера *виртуально* свободно (подгруппа конечного индекса действует свободно). Это, в частности, располагает к прямому комбинаторному изучению подходящих *гладких многообразий Эйленберга-Маклейна*

$$\mathrm{H}^\bullet\left(\frac{\mathcal{T}_g}{\Gamma}, \mathbb{Z}\right)$$

где $(\mathsf{Mod}_g : \Gamma) < \infty$.

Раньше мы обозначали такие многообразия $\widehat{\mathcal{M}_g}$ и упоминали level structures.

При $g = 1$ имеет место изоморфизм

$$\mathsf{Mod}_1 \simeq \mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z}),$$

и level structures – это классическая теория *модулярных кривых*. Речь идёт о прямых обобщениях этой теории.

Список литературы

[**Brown1968**] Ronald Brown, *Topology and groupoids. Elements of modern topology.* McGraw-Hill, New York, 1968.

[**FarbMargalit2012**] Benson Farb and Dan Margalit, *A primer on mapping class groups.* Princeton University press, 2012.

[**Harbater2015**] David Harbater, *Riemann's Existence Theorem.* In "The Legacy of Bernhard Riemann After 150 Years"(ed. by L. Ji, F. Oort, S.-T. Yau), Higher Education Press and International Press, Beijing-Boston, 2015, pp. 275-286.

[**ImaTan1992**] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *An introduction to Teichmüller spaces.* Springer-Verlag, Tokyo, 1992. Translated and revised from the Japanese by the authors. .

[**LubMag1985**] Alexander Lubotzky and Andy R. Magid, *Varieties of representations of finitely generated groups.* Memoirs of the AMS, 58 No. 336, (1985).

[**Serre1956**] Jean-Pierre Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique.* Annales de l'Institut Fourier, Volume 6 (1956), p. 1-42.

[**Weil1960**] A. Weil, *Discrete subgroups of Lie groups I,II* . Ann. of Math. 72, 369-384(1960); 75, 578-602 (1962).

[**Бурбаки1959**] Николя Бурбаки, *Элементы математики (21 выпуск).* ”Наука”, ”Мир”, 1959-1987.

[**ГурвицКурант1968**] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций.* М., ”Наука”, 1968.
[**Каток2002**] С.Б.Каток, *Фуксовы группы.* Факториал, 2002.
[**КарМер1977**] М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков, *Основы теории групп.* М., ”Наука”, 1977.
[**Плоткин1977**] Б. И. Плоткин, *Многообразия представлений групп.* УМН, 1977, том 32, выпуск 5(197), 3–68.
[**Рагунатан1977**] М. Рагунатан, *Дискретные подгруппы групп Ли.* М., "Мир”, 1977.
[**Спрингер1960**] Дж Спрингер, *Введение в теорию римановых поверхностей.* Издательство иностранной литературы, 1960.
[**Хатчер2011**] Аллен Хатчер, *Алгебраическая топология.* МЦНМО, 2011.
[**Хованский2007**] А.Г. Хованский, *Теория Галуа, накрытия и римановы поверхности.* МЦНМО, 2007.
[**Шабат1977**] Г. Б. Шабат, *О комплексной структуре областей, накрывающих алгебраические поверхности.* Функц. анализ и его прил., 1977, том 11, выпуск 2, стр. 67–75.
[**Шафаревич2007**] И.Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии.* МЦНМО, 2007.