Независимый Московский Университет, осень 2020

Г.Б. Шабат,

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ КРИВЫХ-2

Лекция 1 (10 сентября 2020)
Пространства модулей кривых малых родов

В этой лекции начинается обзор геометрии пространств модулей кривых над произвольным алгебраически замкнутым полем. Мы будем свободно пользоваться алгебро-геометрическими понятиями в объёме книг [**Манин2012**] и [**Шафаревич2007**]. Работая с кривыми, мы в основном следуем [**Серр1968**].

1.0. Напоминания

1.0.0. Обозначения. Основное поле $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ предполагается алгебраически замкнутым. Обычно мы работаем над $\Bbbk = \mathbb{C}$ и иногда над $\Bbbk = \overline{\mathbb{Q}}$ или $\Bbbk = \overline{\mathbb{F}}_p$, но сегодня $\Bbbk$ произвольно.

Иногда поле для данной *схемы* (или, иногда точнее, для *функтора точек*) является "переменным", и тогда оно при необходимости указывается в скобках, как в случае *проективного пространства* $\mathbf{P}_n(\Bbbk)$. Для нас наиболее важны примеры пространств *модулей*[1] $\mathcal{M}_g$, а функториальность будет проявляться в очевидных включениях вроде

$$\mathcal{M}_g(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{M}_g(\mathbb{C}).$$

Под *кривой* по умолчанию будет пониматься *неприводимая* (и, следовательно, *связная*) *полная гладкая* кривая над $\Bbbk$. Важную роль играет *поле рациональных функций* $\Bbbk(\mathbf{X})$, снабжённое для всех точек $P \in \mathbf{X}$ *нормированиями* $\mathrm{ord}_P : \Bbbk(\mathbf{X})^\times \to \mathbb{Z}$.

По каждой кривой $\mathbf{X}$ строится частично упорядоченная свободная абелева группа *дивизоров* $\mathrm{Div}(\mathbf{X})$, порождённая её точками:

$$\mathrm{Div}(\mathbf{X}) := \bigoplus_{P \in \mathbf{X}} \mathbb{Z}P.$$

[1] поскольку никаких других мы рассматривать не собираемся, слово *кривых* в сочетании *пространство модулей кривых* мы отныне будем опускать

Определён морфизм групп

$$\mathrm{div} : \Bbbk(\mathbf{X})^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(\mathbf{X}) : f \mapsto \sum_{P\in\mathbf{X}} \mathrm{ord}_P(f),$$

с помощью которого строится важнейший инвариант

$$\mathrm{Pic}(\mathbf{X}) := \frac{\mathrm{Div}(\mathbf{X})}{\mathrm{div}\big(\Bbbk(\mathbf{X})^\times\big)}.$$

Дивизоры, лежащие образе морфизма div, называются *главными*. Два дивизора, отличающиеся на главный, называются *линейно эквивалентными*; для двух дивизоров $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(\mathbf{X})$ их линейная эквивалентность, то есть принадлежность $D_1 - D_2 \in \mathrm{div}\big(\Bbbk(\mathbf{X})\big)$, записывается в виде $D_1 \equiv D_2$.

Определён также морфизм групп

$$\deg : \mathrm{Div}(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathbb{Z} : \sum_{P\in\mathbf{X}} n_P P \mapsto \sum_{P\in\mathbf{X}} n_P.$$

Совсем другое отображение с тем же обозначением[2]:

$$\deg : \Bbbk(\mathbf{X}) \setminus \Bbbk \to \mathbb{N} : x \mapsto \big[\Bbbk(\mathbf{X}) : \Bbbk(x)\big]$$

сопоставляет непостоянной рациональной функции на кривой её *степень*, то есть (если понимать функцию как морфизм $\mathbf{X} \to \mathbf{P}_1$) мощность почти всех линий уровня.

Структура (абстрактной) алгебраической кривой $\mathbf{X}$, как и других алгебраических многообразий, которые нам встретятся, задаётся *структурным пучком* $\mathcal{O}_\mathbf{X}$, сопоставляющим каждому открытому множеству $U \subset \mathbf{X}$ конечно порождённую $\Bbbk$-алгебру $\mathcal{O}(U) \subseteq \Bbbk(\mathbf{X})$ функций, регулярных на U.

1.0.1. Линейные расслоения и пространства Римана-Роха. Все регулярные функции на полных кривых постоянны. Чтобы исследовать кривые с помощью функций на них, приходится ослабить требование регулярности. Это делается одним из двух, на первый взгляд разных, способов:

• Разрешить *полюса*; это заменяет функции на *почти функции*, то есть функции, определённые вне конечных множеств точек (их, впрочем, полезно считать всюду определёнными *накрытиями* проективной прямой $\mathbf{P}_1(\Bbbk) \simeq \Bbbk \coprod \{\infty$, но на множествах накрытий нет традиционных алгебраических структур);

• Относиться к обычным функциям как к *сечениям тривиального линейного расслоения*; тогда среди *нетривиальных* найдутся расслоения с достаточно богатыми запасами сечений.

Указанные подходы оказываются по существу равносильными. Линейные расслоения на кривой $\mathbf{X}$ параметризуются дивизорами $D \in \mathrm{Div}(\mathbf{X})$: если в покрытии $\mathbf{X} = \bigcup_{i\in I} U_i$ дивизор задаётся локальными уравнениями $D\big|_{U_i} = \mathrm{div}(f_i)\bigcap U_i$, то расслоение L_D задаётся функциями перехода $t_{ij} = \frac{f_i}{f_j}$; важно подчеркнуть,

[2] используемые шрифты для аргументов, будем надеяться, предотвратят недоразумения...

что $t_{ij} \in \mathcal{O}^\times(U_{ij})$. Сечения такого расслоения задаются наборами регулярных функций $s_i \in \mathcal{O}(U_i)$, удовлетворяющих на пересечениях соотношениям $s_j = s_i t_{ij}$. Поскольку полюса рациональных функций можно "гасить" функциями перехода (которые могут иметь нули на множествах $U_i \setminus U_{ij}$), не всюду (а *почти всюду...*) определённые рациональные функции таким образом превращаются во всюду определённые сечения линейных расслоений.

Линейно эквивалентные дивизоры определяют *изоморфные* расслоения: если $D_1 \equiv D_2$, то $\mathrm{L}_{D_1} \simeq \mathrm{L}_{D_2}$.

Каждому линейному расслоению $\mathrm{L} \xrightarrow{\pi} \mathbf{X}$ сопоставляется пучок его *сечений*

$$\mathcal{L} : U \mapsto \{s : U \to \mathrm{L} \mid \pi \circ s = \mathrm{id}_U\}.$$

Естественно определяются *рациональные* сечения таких пучков[3]. Для множества всех таких сечений, обладающего структурой 1-мерного векторного пространства над $\Bbbk(\mathbf{X})$, общепринятого обозначения не выработано, и мы будем его использовать лишь в специальных случаях, а сейчас лишь ответим, что для такого ненулевого сечения $s : \mathbf{X} \dashrightarrow \mathrm{L}$ с помощью локальных координат определяется дивизор $\mathrm{div}(s) \in \mathrm{Div}(\mathbf{X})$.

Среди линейных расслоений над данной кривой $\mathbf{X}$, помимо тривиального, выделяются *касательное* и *кокасательное*. Функции перехода для них при наличии *локальных параметров* $x_i \in \mathcal{O}(U_i)$ задаются выражениями $\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_j}\right)^{\pm 1}$, понимаемыми, как в анализе. Сечения этих расслоений интерпретируются как *дифференцирования* и *дифференциалы*. Пучок сечений кокасательного расслоения обозначается $\Omega^1_{\mathbf{X}}$. Пространство его сечений, то есть *абелевых дифференциалов*, обозначается $\Omega^1[\mathbf{X}]$. Размерность этого пространства – одно из определений *рода* кривой,

$$g_{\mathbf{X}} := \dim_{\Bbbk} \Omega^1[\mathbf{X}].$$

Пространство рациональных сечений кокасательного расслоения обозначается $\Omega^1(\mathbf{X})$; его элементы тоже называются *абелевыми дифференциалами* (классически – *первого, второго и третьего рода*[4])

Поскольку для любых ненулевых дифференциалов $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(\mathbf{X}) \setminus \{0\}$ их отношение – ненулевая рациональная функция $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \Bbbk(\mathbf{X})^\times$, их дивизоры $\omega_1 \equiv \omega_2$ *линейно эквивалентны*. Класс этой линейной эквивалентности называется *каноническим классом* кривой и будет обозначаться $\mathbf{K}_{\mathbf{X}} \in \mathrm{Pic}(\mathbf{X})$ или просто

$$\mathbf{K} \in \mathrm{Pic}(\mathbf{X}).$$

Любой представитель канонического класса, далее называемый просто *каноническим*, будет традиционно обозначаться

$$K \in \mathrm{Div}(\mathbf{X});$$

---

[3] Инвариантное определение см. в [**Серр1968**].

[4] в других языках терминологической коллизии не происходит: например, по-английски *род кривой* – это *genus of the curve*, а *дифференциал третьего рода* – это *differential of the third kind*.

иначе говоря, для любого $\omega \in \Omega^1(\mathbf{X}) \setminus \{0\}$ законно обозначение $\operatorname{div}(\omega) = K$.

Если $g_{\mathbf{X}} = g$, то

$$\deg K = 2g - 2.$$

Для каждого дивизора $D \in \operatorname{Div}(\mathbf{X})$ строится конечномерное над $\Bbbk$ *пространство Римана-Роха*

$$\mathrm{L}(D) := \{x \in \Bbbk(\mathbf{X}) \mid \operatorname{div}(x) + D \geq 0\};$$

важнейший инвариант дивизора – *размерность* этого пространства

$$\ell(D) := \dim_{\Bbbk} \mathrm{L}(D).$$

В случае *очень обильного* дивизора любой базис $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle = \mathrm{L}(D)$ определяет вложение

$$\iota_D = (x_0 : \cdots : x_n) : \mathbf{X} \hookrightarrow \mathbf{P}_n,$$

которое считается зависящим только от дивизора D, поскольку при смене базиса пространства $\mathrm{L}(D)$ образ кривой $\iota_D(\mathbf{X})$ изменится лишь на проективное преобразование.

1.0.2. Теорема Римана-Роха. *Пусть* $\mathbf{X}$*– кривая рода* g*, на ней дан произвольный дивизор* $D \in \operatorname{Div}(\mathbf{X})$ *и канонический дивизор* K*. Тогда*

$$\boxed{\ell(D) - \ell(D - K) = d - g + 1} \tag{1.0.2a}$$

Следствие. *В условиях теоремы выполняется* **неравенство Римана-Роха**

$$\ell(D) \geq d - g + 1 \tag{1.0.2b}$$

Следствие. *В условиях теоремы если* $d \geq 2g - 1$*, то*

$$\ell(D) = d - g + 1 \tag{1.0.2c}$$

При ссылке на любое из этих утверждений мы иногда будем пользоваться аббревиатурой RR.

1.1. Пространства модулей малых родов

1.1.0. $\mathcal{M}_0$**.** Здесь нет интересной геометрии, поскольку для любого $\Bbbk$ пространство $\mathcal{M}_0(\Bbbk)$ одноточечно. Однако оно нам ещё пригодится при обсуждении *комбинаторных* пространств модулей.

Проанализируем кривые рода 0 с помощью теоремы Римана-Роха. Пусть $\mathbf{X}$ – такая кривая; выберем на ней произвольную точку, которую в соответствии с традицией обозначим $\underline{\infty} \in \mathbf{X}$. Согласно RR,

$$\ell(\underline{\infty}) = 2,$$

поэтому найдётся

$$x \in \mathrm{L}(\underline{\infty}) \setminus \Bbbk.$$

Поскольку[5] $\deg(x) = 1$, функция x осуществляет биекцию кривых

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{P}_1(\Bbbk)$$

[5] решите задачу **1.1**

и изоморфизм полей

$$\Bbbk(\mathbf{X}) \simeq \Bbbk(x).$$

1.1.1. $\mathcal{M}_1$**.** Пусть $\mathbf{X}$ – кривая рода 1. Снова выберем на ней произвольную точку, которую снова обозначим $\underline{\infty} \in \mathbf{X}$ (поскольку будем называть *бесконечной*). По теореме Римана-Роха

$$\ell(2\underline{\infty}) = 2 \text{ и } \ell(3\underline{\infty}) = 3,$$

поэтому найдутся

$$x \in \mathrm{L}(2\underline{\infty}) \setminus \ell(2\underline{\infty})$$

и

$$y \in \mathrm{L}(3\underline{\infty}) \setminus \Bbbk.$$

Тогда семь функций (одна из которых – константа)

$$x^3, y^2, xy, x^2, y, x, 1$$

имеют в $\underline{\infty}$ полюса не выше шестого порядка, то есть

$$\{x^3, y^2, xy, x^2, y, x, 1\} \subset \mathrm{L}(6\underline{\infty}).$$

Но по теореме Римана-Роха $\dim \mathrm{L}(6\underline{\infty}) = 6$, так что эти семь функций связаны нетривиальным линейным соотношением; предварительно запишем его в виде

$$ax^3 + by^2 + cxy + dx^2 + ey + fx + g = 0. \tag{1.1.1a}$$

Заметим, что $ab \neq 0$ – решите задачу **1.2.** В силу этого соотношение (1.1.1a) можно переписать в *форме Тейта*, имеющей глубокий арифметический смысл (см. [**Silverman2009**], стр. 46):

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6. \tag{1.1.1b}$$

Для всех возможных основных полей более компактной записи, видимо, не существует. Однако при $\mathrm{char}(\Bbbk) \notin \{2, 3\}$ (далее принимаем это предположение) линейными заменами функций x, y уравнение может быть сильно упрощено: (см. [**Silverman2009**], стр. 48). Введём обозначение для получаемой плоской аффинной кривой (такие кривые по историческим причинам называются *эллиптическими*)

$$\dot{\mathbf{E}}_{c_1,c_2}: \quad y^2 = x^3 - 27c_4x - 54c_6. \tag{1.1.1c}$$

Это кривая $\dot{\mathbf{E}}_{c_1,c_2} \subset \mathbf{A}_2(\Bbbk)$ гладка тогда и только тогда, когда

$$c_4^3 \neq c_6^2 \tag{1.1.1d}$$

– см. задачу **1.3.**

Введём также обозначение для *проколотой* (абстрактной!) кривой

$$\dot{\mathbf{X}} := \mathbf{X} \setminus \{\underline{\infty}\};$$

нами построен морфизм

$$(x, y) : \dot{\mathbf{X}} \longrightarrow \dot{\mathbf{E}}_{c_1,c_2}.$$

На самом деле это – *изо*морфизм[6], но убедиться в этом удобнее, перейдя к пополнению и проективизации.

[6] Я благодарен слушателю курса А. Молякову, указавшему на необходимость обоснования этого.

Вложив обычным образом аффинную плоскость в проективную

$$\mathbf{A}_2(\Bbbk) \hookrightarrow \mathbf{P}_2(\Bbbk) : (x, y) \mapsto (x : y : 1),$$

получим замыкание аффинной кривой $\dot{\mathbf{E}}_{c_1,c_2} \hookrightarrow \mathbf{E}_{c_1,c_2} \subset \mathbf{P}_2(\Bbbk)$, где проективная кривая задана однородным уравнением

$$\mathbf{E}_{c_1,c_2}: \quad y^2 z = x^3 - 27c_4 x z^2 - 54c_6 z^3; \tag{1.1.1e}$$

нетрудно убедиться, что эта кривая остаётся гладкой при условии (1.1.1d). Она имеет род 1, поскольку на ней есть регулярный дифференциал $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ без нулей и полюсов (начинающим рекомендуется тщательно проверить это). Теперь определён морфизм полных кривых

$$(x : y : 1) : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{E}_{c_1,c_2};$$

в том, что это – изоморфизм, предлагается убедиться в упражнении **(1.4)**.

Нами (при упрощающем предположении $\mathrm{char}(\Bbbk) \notin \{2, 3\}$) установлен следующий результат.

Теорема. *Любая кривая рода* 1 *изоморфна гладкой плоской кубике.* ■

Однако для применения этого результата к полному описанию пространства модулей $\mathcal{M}_1$ надо ещё освоить множество всех (или почти всех) кубик.

Всякая ли кубика – неприводимая кривая рода 1? Разумеется, нет: например, уравнение $xyz = 0$ в $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$ задаёт объединение трёх прямых. Надо придать точный смысл ощущению того, что этот пример исключителен.

Самая общая кубика в $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$ задаётся уравнением

$$\sum_{i+j+k=3} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0, \tag{1.1.1f}$$

где $(a_{300}, \ldots, a_{003}) \neq (0, \ldots, 0)$. Поскольку коэффициенты уравнения (1.1.1f) имеют смысл лишь с точностью до общей пропорциональности, правильно считать, что кубики параметризуются точками проективного пространства

$$(a_{300} : \cdots : a_{003}) \in \mathbf{P}_9(\Bbbk).$$

Из этого пространства следует выбросить множество наборов коэффициентов $(a_{300} : \cdots : a_{003})$, задающих особые, приводимые... или ещё хуже того (например, *трёхкратная прямая*, задаваемая уравнением $x^3 = 0$), кривые. В задачах **1.5.** и **1.6.** предлагается доказать, что для гладкости кубики достаточно, чтобы набор коэффициентов не лежал на некоторой гиперповерхности $\mathbf{Sing} \subset \mathbf{P}_9(\Bbbk)$, и что для любой гладкой кубики на проективной плоскости найдётся *прямая перегиба*, то есть прямая, пересекающая кубику (*трёхкратно*) в единственной точке.

Практически работать с уравнением (1.1.1f) невозможно, и подбираются такие координаты, в которых уравнение выглядит компактнее – выше мы обсуждали такие действия с семичленными уравнениями (1.1.1a) и (1.1.1b). Сейчас мы

(единственный раз!) распишем 10-членное уравнение (1.1.1f)

$$\begin{gathered} a_{300}x^3+ \\ +a_{210}x^2y+a_{201}x^2z+ \\ +a_{120}xy^2+a_{111}xyz+a_{102}xz^2+ \\ +a_{030}y^3+a_{021}y^2z+a_{012}yz^2+a_{003}z^3=0 \end{gathered} \qquad (1.1.1f')$$

и выберем координаты так, чтобы прямая "$z=0$" оказалась прямой перегиба. Пересечение этой прямой с кубикой "(1.1.1f')" задаётся уравнением

$$a_{300}x^3+a_{210}x^2y+a_{120}xy^2+a_{030}y^3=0. \qquad (1.1.1g)$$

Мы требуем, чтобы у этого уравнения был только один (трёхкратный) корень – скажем, (0:1:0); это равносильно равенствам

$$a_{210}=a_{120}=a_{030}=0.$$

Подстановка этих равенств в 10-членное уравнение (1.1.1f') превращает его в 7-членное

$$a_{300}x^3+a_{201}x^2z+a_{111}xyz+a_{102}xz^2+a_{021}y^2z+a_{012}yz^2+a_{003}z^3=0. \quad (1.1.1h)$$

Если положить в нём $z=1$, то есть рассмотреть на аффинной плоскости вне "бесконечной" прямой "$z=0$", то получится уравнение

$$a_{300}x^3+a_{201}x^2+a_{111}xy+a_{102}x+a_{021}y^2+a_{012}y+a_{003}=0, \qquad (1.1.1i)$$

почти совпадающее с рассмотренным выше (1.1.1a).

Остаётся, как и при анализе того уравнения, убедиться, что $a_{300}a_{021}\neq 0$. Но равенство $a_{300}=0$ превратило бы кубику в конику (точнее, проективная кубика представляла бы собой объединение коники с "бесконечной" прямой), а в случае $a_{021}=0$ уравнение (1.1.1i) можно было бы решить относительно y, и кубика оказалось бы рациональной вопреки предположению $g=0$.

Итак, мы привели произвольную гладкую кубику к уже рассмотренному выше виду. Чтобы окончательно осознать структуру пространства модулей $\mathcal{M}_1(\Bbbk)$, осталось осознать два обстоятельства:

- Выбор координат в $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$ соответствует действию группы $\mathsf{PGL}_3(\Bbbk)$ на $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$;
- Изоморфные кубики проективно эквивалентны.

(Желательно, чтобы второе стало очевидно. Все наши действия с абстрактными кривыми носят *линейно-алгебраический* характер вроде выборов базисов в конечномерных пространствах и потому выражаемы через действие $\mathsf{PGL}_3(\Bbbk)$).

Опустив некоторые детали, мы пришли к главному выводу:

$$\boxed{\mathcal{M}_1(\Bbbk)\simeq\frac{\mathbf{P}_9(\Bbbk)\setminus\mathbf{Sing}}{\mathsf{PGL}_3(\Bbbk)}}$$

Хотя мы еще не ввели на множестве $\mathcal{M}_1(\Bbbk)$ никакой структуры, интуитивно ясное следствие заключается в том, что

$$\dim_{\Bbbk}\mathcal{M}_1(\Bbbk)=\dim_{\Bbbk}\big(\mathbf{P}_9(\Bbbk)\big)-\dim_{\Bbbk}\big(\mathsf{PGL}_3(\Bbbk)\big)=9-8=1.$$

1.2. О геометрической теории инвариантов

Общематематическая проблема теории инвариантов возникает, когда задано действие группы на множестве

$$G : \mathcal{Z}$$

и требуется в том или ином смысле описать фактор-множество

$$\frac{\mathcal{Z}}{G}.$$

Как правило, и на множестве, и на группе имеются какие-то *структуры* (обычно – одинаковые), и отображения, задающие группу и её действие, то есть

$$G \times G \longrightarrow G : (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2,$$
$$G \longrightarrow G : g \mapsto g^{-1}$$

и

$$G \times \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z} : (g, z) \mapsto g \cdot z,$$

имеющиеся структуры *уважают*. Одна из основных проблем теории: в какой мере на фактор-множество $\frac{\mathcal{Z}}{G}$ переносится та же структура?

Инвариантами кратко называются G-инвариантные *функции* на $\mathcal{Z}$.

В интересующих нас случаях и множество, и группа наделены структурой алгебраических многообразий. Оказывается, полностью на фактор-множество это структура переносится далеко не всегда; простейший пример –

$$G = \mathbb{k}^\times, \mathcal{Z} = \mathbb{k},$$

а действие определяется умножением. Фактор-множество $\frac{\mathcal{Z}}{G}$ двухэлементно и в очень сильном смысле *неотделимо*. Вряд ли на нём можно ввести разумную структуру алгебраического многообразия.

Это нежелательное явление подсказывает способ его преодоления: выбросить ПЛОХИЕ орбиты, то есть выделить (как можно большее) G-инвариантное подмножество

$$\mathcal{Z}^{\mathsf{good}} \subseteq \mathcal{Z},$$

такое, что фактор-множество $\frac{\mathcal{Z}^{\mathsf{good}}}{G}$ всеми желательными свойствами. Потом, правда, часто оказывается, что о выброшенных плохих орбитах приходится вспомнить, вводить $\frac{\mathcal{Z}^{\mathsf{bad}}}{G}$ и приделывать его, как обычно говорят, "на границу" множества $\frac{\mathcal{Z}^{\mathsf{good}}}{G}$. Именно это последнее действие характерно для геометрической теории инвариантов. Она представляет собой огромный раздел математики, восходящий к чудовищным ручным вычислениям классиков XIX-го века. По геометрической теории инвариантов имеется обширная современная литература, из которой можно порекомендовать, например, книгу [**Dolgachev2003**], в которой нужные нам примеры подробно разобраны, в том числе с исторической точки зрения.

Мы сегодня поработали с простейшим (с точки зрения пространств модулей) случаем

$$\mathcal{Z} = \mathbf{P}_9(\mathbb{k}), G = \mathsf{PGL}(\mathbb{k});$$

множество $\mathcal{Z}^{\mathsf{good}} = \mathbf{P}_9(\Bbbk) \setminus \mathbf{Sing}$ состояло из уравнений гладких кубик. В следующей лекции мы разберём этот пример более подробно.

Список литературы

[**Dolgachev2003**] Igor Dolgachev, *Lectures on Invariant Theory.* Cambridge University Press, 2003.

[**Silverman2009**] Joseph H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves.* Springer, 2009.

[**Манин2012**] Ю.И. Манин, *Введение в теорию схем и квантовые группы.* МЦНМО, 2012.

[**Серр1968**] Ж.-П. Серр, *Алгебраические группы и поля классов.* Перев. с франц. — М.: Мир, 1968.

[**Шафаревич2007**] И.Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии.* МЦНМО, 2007.