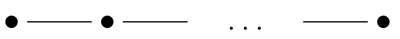
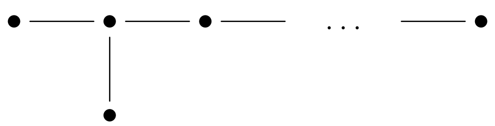
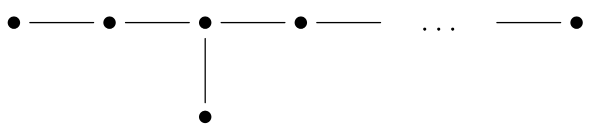
1.12.2020
Лекция 12

Классификация колчанов с конечным числом неразложимых представлений

Сегодня мы решим следующую важную задачу: описать все колчаны, для которых множество неразложимых представлений конечно. Начнём с ответа:

Теорема 1 (Габриэль). *Пусть Γ — связный конечный колчан. Тогда множество неразложимых конечномерных представлений Γ конечно тогда и только тогда, когда Γ — колчан Дынкина, т.е. один из следующих колчанов с любой ориентацией (где n — количество вершин):*

1. *A_n, $n \geqslant 1$:*  ,
2. *D_n, $n \geqslant 4$:*  ,
3. *E_n, $n = 6, 7, 8$:*  .

Перед доказательством напомним, чем замечательны колчаны Дынкина.

Определение 2. Пусть Γ — колчан с n вершинами. Определим квадратичную *форму Титса* q_Γ на пространстве $\mathbb{Q}^n$ (или $\mathbb{R}^n$) с координатами $x_i, i \in \Gamma_0$ формулой

$$q_\Gamma(x) = \sum_{i \in \Gamma_0} x_i^2 - \sum_{a \in \Gamma_1} x_{s(a)} x_{t(a)}.$$

Предложение 3. *Пусть Γ — связный колчан. Тогда форма q_Γ положительно определена тогда и только тогда, когда Γ — колчан Дынкина.*

Это предложение доказывается вручную методом выделения полных квадратов. Если вы его раньше не доказывали, это рекомендуется сделать самостоятельно.

Теперь докажем простую половину теоремы с помощью рассуждения, приписываемого Титсу.

Предложение 4. *Предоложим, что поле k бесконечно. Пусть Γ — связный колчан и форма q_Γ не положительно определена. Тогда для некоторого вектора размерности $\bar{d}$ множество классов изоморфизма представлений Γ над k размерности $\bar{d}$ бесконечно.*

Доказательство. Фиксируем вектор размерности $\bar{d} = (d_i), i \in \Gamma_0$ и рассмотрим представления $M = (M_i)$ колчана Γ в координатных пространствах $M_i = \mathsf{k}^{d_i}$. Представление Γ в этих пространствах задаётся набором линейных отображений $\mathsf{k}^{s(a)} \leftarrow \mathsf{k}^{t(a)}$ для всех стрелок a. Множество всех таких представлений обозначим

$$Rep_{\bar{d}}(\Gamma) := \oplus_{a \in \Gamma_1} Mat_{s(a) \times t(a)}(\mathsf{k}).$$

Среди этих представлений много изоморфных. Рассмотрим группу

$$G_{\bar{d}} := \prod_{i \in \Gamma_0} GL_{d_i}(\mathsf{k}),$$

она действует на множестве $Rep_{\bar{d}}(\Gamma)$ сопряжениями, так что классы изоморфизма представлений рамерности $\bar{d}$ соответствуют орбитам. Предположим, что размерность группы $G_{\bar{d}}$ меньше размерности аффинного проостранства $Rep_{\bar{d}}(\Gamma)$, на котором она действует, тогда множество орбит бесконечно. Это же верно и при равенстве размерностей, так как в $G_{\bar{d}}$ есть одномерная диагональная подгруппа, действующая тривиально. Вычислим разность размерностей:

$$\dim G_{\bar{d}} - \dim Rep_{\bar{d}}(\Gamma) = \sum_{i\in\Gamma_0} d_i^2 - \sum_{a\in\Gamma_1} d_{s(a)}d_{t(a)} = q_\Gamma(\bar{d}).$$

Несложно видеть, что если форма q_Γ не положительно определена, то существует ненулевой вектор $\bar{d}$, для которого $q_\Gamma(\bar{d}) \leqslant 0$, причём компоненты d_i можно выбрать целыми неотрицательными. Значит, классов изоморфизма представлений Γ с таким вектором размерности бесконечно много. □

Отсюда легко вытекает

Следствие 5. *Предоложим, что поле* k *бесконечно. Пусть* Γ *— связный колчан и форма* q_Γ *не положительно определена. Тогда для некоторого вектора размерности* $\bar{d}$ *множество классов изоморфизма* ***неразложимых*** *представлений* Γ *над* k *размерности* $\bar{d}$ *бесконечно.*

Доказательство второй половины теоремы — о конечности неразложимых представлений для колчанов Дынкина — более интересно и не зависит от основного поля. Мы расскажем доказательство, принадлежащее Бернштейну, Гельфанду и Пономарёву (которые и придумали функторы отражений). Для начала нам понадобится связать форму Титса и форму Эйлера на группе Гротендика представлений колчана.

Напомним, что группа Гротендика категории $\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma$ есть свободная абелева группа, порождённая классами $[S_i], i \in \Gamma_0$ простых модулей. Билинейная форма Эйлера на этой группе определяется равенством

$$\langle [M],[N]\rangle = \sum_s (-1)^s \dim \mathrm{Hom}^s(M,N),$$

верным для всех $\mathsf{k}\Gamma$-модулей M, N. Также рассмотрим билинейную симметрическую форму Q_Γ, соответствующую квадратичной форме q_Γ, умноженной на 2 для удобства. Иными словами,

$$Q_\Gamma(x,y) = 2\sum_{i\in\Gamma_0} x_i y_i - \sum_{a\in\Gamma_1}(x_{s(a)}y_{t(a)} + x_{t(a)}y_{s(a)})$$

и $Q_\Gamma(x,x) = 2q_\Gamma(x)$.

Предложение 6. *Для любого колчана* Γ *без ориентированных циклов при изоморфизме* $K_0(\mathsf{k}\Gamma) \to \mathbb{Z}^{|\Gamma_0|}$ *симметризация формы Эйлера* $\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$ *соответствует билинейной форме Титса* $Q_\Gamma(x,y)$.

Доказательство. Достаточно проверить равенство для классов простых модулей $[S_i] \in K_0(\mathsf{k}\Gamma)$, которые соответствуют базисным векторам $e_i \in \mathbb{Z}^{|\Gamma_0|}$.

Имеем $\langle [S_i],[S_i]\rangle = 1$, так как простые модули исключительны. Кроме того, очевидно $Q_\Gamma(e_i,e_i) = 2$, так что всё сходится. Для $i \neq j$ имеем

$$\langle [S_i],[S_j]\rangle = -\dim \mathrm{Ext}^1(S_i,S_j) = -\text{число стрелок из } j \text{ в } i,$$

значит $\langle [S_i],[S_j]\rangle + \langle [S_j],[S_i]\rangle$ равно минус числу стрелок между i и j. Тому же равно и $Q_\Gamma(e_i,e_j)$. □

Теперь выясним, как действуют функторы отражений на группах Гротендика. Пусть Γ — произвольный колчан без ориентированных циклов. Пусть v — источник в Γ, и $\Gamma' := \sigma_v^+\Gamma$. Заметим, что вершины у Γ и Γ' одинаковые, поэтому группы $\mathbb{Z}^{|\Gamma_0|}$ и $\mathbb{Z}^{|\Gamma'_0|}$ канонически изоморфны. Тем самым, получаем отождествление групп $K_0(\mathsf{k}\Gamma)$, $K_0(\mathsf{k}\Gamma')$ и $\mathbb{Z}^{|\Gamma_0|}$, переводящее класс простого Γ-модуля S_i в класс простого Γ'-модуля S_i и в координатный вектор e_i.

Предложение 7. *С учётом отождествлений $K_0(\mathsf{k}\Gamma) \cong \mathbb{Z}^{|\Gamma_0|}$ функтор отражения*

$$\Phi^+ \colon \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\Gamma) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\Gamma')$$

действует на K_0 оператором ϕ_v, являющимся отражением σ_{e_v} относительно вектора e_v и билинейной формы Q_Γ.

Доказательство. Напомним, что отражение $\sigma_\alpha \colon \mathbb{Z}^{|\Gamma|} \to \mathbb{Z}^{|\Gamma|}$ относительно вектора α задаётся формулой

$$\sigma_\alpha(x) = x - 2\frac{Q(x,\alpha)}{Q(\alpha,\alpha)} \cdot \alpha.$$

Мы знаем, что оператор ϕ_v сохраняет форму Эйлера, а значит и билинейную форму Титса. Напомним также, что $\Phi_v^+(P_v) \cong I_v[-1]$, $\Phi_v^+(P_i) \cong P_i$ при $i \neq v$. При этом $P_v \cong S_v$ как представления Γ и $I_v \cong S_v$ как представления Γ'. Тем самым, ϕ_v переводит $[S_v] = e_v$ в $-e_v$, как и отражение σ_{e_v}. Чтобы показать, что ϕ_v — отражение, достаточно (т.к. ϕ_v — изометрия) проверить для всех векторов x из некоторого базиса $\mathbb{Z}^{|\Gamma_0|}$, что $\phi_v(x) = x + \lambda \cdot e_v$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{Z}$ (зависящего от x). В качестве базиса возьмём классы $[P_i]_\Gamma$ проективных Γ-модулей P_i. Действительно, для $i = v$ всё уже проверено, пусть $i \neq v$. Модуль P_i в вершине j имеет базис из путей из j в i. Для $j \neq v$ эти пути в Γ и в Γ' одинаковые, поэтому вектор размерности Γ- и Γ'-модулей P_i отличается только в вершине v. Значит, имеем

$$\phi_v([P_i]_\Gamma) - [P_i]_\Gamma = [P_i]_{\Gamma'} - [P_i]_\Gamma \in \mathbb{Z} \cdot [S_v].$$

Что и требовалось. □

Таким образом, функторы отражений действуют на K_0 отражениями. Мы будем использовать теорию групп отражений и систем корней, предполагая её известной слушателю. Напомним необходимые сведения. Рассмотрим свободную абелеву группу $\mathbb{Z}^{|\Gamma_0|}$ с билинейной формой Q_Γ. Корнем называется вектор x с $Q_\Gamma(x,x) = 2$ (т.е. $q_\Gamma(x) = 1$). Операторы отражения относительно корней сохраняют решетку $\mathbb{Z}^{|\Gamma_0|}$ и подмножество корней. Векторы $e_i, i \in \Gamma$ называются простыми корнями, а корни вида $\sum_i x_i e_i$ с $x_i \geqslant 0$ — положительными корнями. Группой Вейля W называется группа изометрий $\mathbb{Z}^{|\Gamma_0|}$, порождённая отражениями в простых корнях. Если форма Q_Γ положительно определена, то множество корней и группа Вейля конечны. Более того, любой корень положительный или отрицательный, и отражение в простом корне переставляет все отличные от него положительные корни. Если колчан связный, то группа Вейля транзитивно действует на корнях.

Напомним, что неразложимые $\mathsf{k}\Gamma$-модули делятся на регулярные и нерегулярные в зависимости от того, как на них действуют функторы отражения. А именно, неразложимый $\mathsf{k}\Gamma$-модуль M называется $+$-регулярным (соотв. $-$-регулярным), если любая последовательность функторов правых (соотв. левых) отражений, применённая к M, даёт снова $\mathsf{k}\Gamma$-модуль. Эти условия равносильны тому, что $(\Phi^+)^m(M)$ (соотв. $(\Phi^-)^m(M)$) — модули при всех $m \geqslant 0$.

Определение 8. Говорят, что неразложимый $\mathsf{k}\Gamma$-модуль M *препроективный* (соотв. *преинъективный*), если он не $+$-регулярный (соотв. не $-$-регулярный). Иными словами, M препроективный (соотв. преинъективный), если для некоторой $+$-допустимой (соотв. $-$-допустимой) последовательности вершин $v_1, \ldots, v_m$ в Γ объект $\Phi^+_{v_m} \circ \ldots \circ \Phi^+_{v_1}(M)$ (соотв. $\Phi^-_{v_m} \circ \ldots \circ \Phi^-_{v_1}(M)$) не является модулем.

Препроективные модули удобно описывать с помощью корней. А именно, пусть M препроективен. Как мы видели, для некоторой $+$-допустимой последовательности $v_1, \ldots, v_m$ в Γ имеем $\Phi^+_{v_m} \circ \ldots \circ \Phi^+_{v_1}(M) \cong P_v$, причём в новом колчане v есть источник, и $P_v \cong S_v$. Это значит, что $\phi_{v_m} \circ \ldots \circ \phi_{v_1}([M]) = e_i$. То есть, элемент группы Вейля переводит $[M]$ в простой корень, и следовательно $[M]$ также является корнем, и он очевидно положителен. Имеем отображение

$$\kappa\colon \{\text{препроективные модули}\}/_{\cong} \to \{\text{положительные корни}\},$$

переводящее модуль в его класс. Оно инъективно, и верно даже немного большее:

Предложение 9. *Пусть Γ — колчан без ориентированных циклов. Пусть $M, N \in \mathrm{Ind}(\mathsf{k}\Gamma)$ и $[M] = [N]$ в $K_0(\mathsf{k}\Gamma)$. Предположим, что один из модулей M, N препроективный. Тогда $M \cong N$. В частности, отображение κ инъективно.*

Доказательство. По предположению, существует $+$-допустимая последовательность вершин $v_1, \ldots, v_m$, для которой функтор $\Phi^+_{v_m} \circ \ldots \circ \Phi^+_{v_1}$ переводит M или N в проективный простой модуль P_v (где v — источник в колчане $\sigma^+_{v_m} \ldots \sigma^+_{v_1}\Gamma$). Выберем такую последовательность минимальной длины, тогда можно считать, что $\Phi^+_{v_m} \circ \ldots \circ \Phi^+_{v_1}(M) \cong P_v \cong S_v$ и $\Phi^+_{v_m} \circ \ldots \circ \Phi^+_{v_1}(N) =: N'$ — модуль. При этом имеем $[S_v] = [N']$. Легко видеть, что модуль N' с вектором размерности $[S_v] = e_v$ обязан быть изоморфен S_v. А значит, $M \cong N$. $\square$

Далее мы будем предполагать, что форма q_Γ положительно определена. В этом случае мы покажем, что κ — изоморфизм.

Для этого понадобится понять, как действует функтор Φ^+ на группе K_0. Напомним, что Φ^+ по определению есть композиция функторов отражения $\Phi^+_{v_n} \circ \ldots \circ \Phi^+_{v_1}$, где $v_1, \ldots, v_n$ — любая $+$-допустимая последовательность, в которая каждая вершина Γ встречается ровно один раз. Соответствующий оператор w на $K_0(\mathsf{k}\Gamma)$ называется *преобразованием Кокстера.* Он является композицией отражений в простых корнях $\sigma_{v_n} \circ \ldots \circ \sigma_{v_1}$. То есть, преобразование Кокстера не однозначно определяется системой корней, а ещё зависит от ориентации на колчане.

Обозначим $C := \sum_{i \in \Gamma_0} \mathbb{Z}_{\geqslant 0} e_i \subset \mathbb{Z}^{|\Gamma_0|}$.

Лемма 10. *Пусть форма q_Γ положительно определена, w — преобразование Кокстера на $\mathbb{Z}^{|\Gamma_0|}$. Тогда*

(a) 1 —не собственное значение w,

(b) для любого $x \in C$, $x \neq 0$ существует $m > 0$, для которого $w^m(x) \notin C$.

Доказательство. (a) Пусть $x \in \mathbb{R}^{|\Gamma_0|}$ и $w(x) = x$. То есть,

$$\sigma_{e_{v_n}} \ldots \sigma_{e_{v_1}}(x) = x, \tag{1}$$

где каждая вершина колчана входит один раз в последовательность $v_1, \ldots, v_n$. Заметим, что отражение σ_{e_i} меняет только i-ю координату вектора. Поэтому из равенства (1) следует, что $\sigma_{e_i}(x) = x$ при всех i, т.е. x ортогонален всем векторам e_i. Так как Q_Γ невырождена, получаем $x = 0$.

(b) Так как группа Вейля конечна, существует такое $N > 0$, что $w^N = \mathrm{id}$. Пусть $w^i \in C$ при всех $i > 0$. Рассмотрим $y := \sum_{i=0}^{N-1} w^i(x)$. Мы видим, что $w(y) = y$, по пункту (a) получаем $y = 0$. Но C — пересечение октанта с решёткой, откуда следует, что $w^i(x) = 0$ при всех i и $x = 0$. $\square$

Теперь мы готовы доказать

Предложение 11. *Пусть Γ — колчан, для которого форма q_Γ положительно определена. Тогда отображение*

$$\kappa\colon \{\text{препроективные модули}\} \to \{\text{положительные корни}\}$$

есть биекция.

Доказательство. Инъективностость показана в предложении 9, покажем сюръективность. Пусть x — положительный корень. В частности, $x \in C$. По лемме 10 при некотором m' имеем $w^{m'}(x) \notin C$. Это значит, что для некоторой $+$-допустимой последовательности вершин $v_1, \ldots, v_m$ имеем $\phi_{v_m} \circ \ldots \circ \phi_{v_1}(x) \notin C$ (где $\phi_v = \sigma_{e_v}$ — отражение в корне). Выберем такое минимальное m, т.е. предположим, что $\phi_{v_k} \circ \ldots \circ \phi_{v_1}(x) \in C$ при всех $1 \leqslant k < m$. Обозначим $y := \phi_{v_{m-1}} \circ \ldots \circ \phi_{v_1}(x)$. Этот y — положительный корень и $\phi_{v_m}(y) \notin C$. Так как $\phi_{v_m} = \sigma_{e_{v_m}}$ переставляет все положительные корни, кроме e_{v_m}, получаем, что $y = e_{v_m}$.

Теперь вернёмся к модулям и проделаем отражения в обратном порядке: положим

$$M := \Phi^-_{v_1} \circ \ldots \circ \Phi^-_{v_{m-1}}(P_{v_m}).$$

Легко видеть (так как $P_{v_m} \cong S_{v_m}$), что

$$[M] = \phi_{v_1} \circ \ldots \circ \phi_{v_{m-1}}(y) = x.$$

Более того, при любом $1 \leqslant k < m$ класс объекта

$$\Phi^-_{v_k} \circ \ldots \circ \Phi^-_{v_{m-1}}(S_{v_m})$$

есть

$$\phi_{v_k} \circ \ldots \circ \phi_{v_{m-1}}(y) = \phi_{v_{k-1}} \circ \ldots \circ \phi_{v_1}(x).$$

По нашему предположению, это положительный корень, и значит все объекты $\Phi^-_{v_k} \circ \ldots \circ \Phi^-_{v_{m-1}}(P_{v_m})$ и в том числе M суть модули, а не сдвиги модулей.

Таким образом, $\kappa(M) = [M] = x$, и очевидно, что M препроективный модуль. $\square$

Следствие 12. *Для колчана Γ с положительно определённой формой q_Γ множества препроективных и преинъективных модулей совпадают.*

Доказательство. Аналогично предложению 11 доказывается, что соответствие $M \mapsto [M]$ задаёт биекцию между множеством преинъектиных модулей и положительных корней. Из предложения 9 теперь следует, что препроективные и преинъективные модули совпадают. $\square$

Наконец, покажем, что для колчанов Дынкина регулярных модулей нет.

Предложение 13. *Для колчана Γ с положительно определённой формой q_Γ любой неразложимый модуль является препроективным.*

Доказательство. Пусть $M \in \mathrm{Ind}(\mathsf{k}\Gamma)$ и $x := [M]$, имеем $x \in C$. Так же, как в доказательстве предложения 11, с помощью леммы 10 получим, что для некоторой $+$-допустимой последовательности вершин $v_1, \ldots, v_m$ имеем $\phi_{v_k} \circ \ldots \circ \phi_{v_1}(x) \in C$ при всех $1 \leqslant k < m$, но $\phi_{v_m} \circ \ldots \circ \phi_{v_1}(x) \notin C$. Обозначим $y := \phi_{v_{m-1}} \circ \ldots \circ \phi_{v_1}(x)$. Этот $y \in C$ и $\phi_{v_m}(y) \notin C$. При этом $\phi_{v_m}(y)$ — класс неразложимого объекта, который обязан быть сдвигом модуля на -1. Значит, $\phi_{v_m}(y) \in -C$. Оператор $\phi_{v_m} = \sigma_{e_{v_m}}$ меняет только одну, v_m-ю координату вектора, откуда следует, что $y = d \cdot e_{v_m}$, где $d \geqslant 0$. При этом y есть класс неразложимого модуля $\Phi^+_{v_{m-1}} \circ \ldots \circ \Phi^+_{v_1}(M) =: N$. Видно, что N обязан быть изоморфен $S^d_{v_m}$, и значит $d = 1$. Наконец, v_m — источник в $\sigma^+_{v_{m-1}} \ldots \sigma^+_{v_1}\Gamma$, и значит $N \cong P_{v_m}$. То есть, M препроективный. $\square$

Итого, мы доказали: Пусть Γ — колчан Дынкина. Тогда множество $\mathrm{Ind}(\mathsf{k}\Gamma)$ конечно, состоит из препроективных и одновременно преинъекивных модулей, соответствие $M \mapsto [M]$ задаёт биекцию между $\mathrm{Ind}(\mathsf{k}\Gamma)$ и множеством положительных корней в $K_0(\mathsf{k}\Gamma)$ относительно формы Q_Γ.

Пример 14. Рассмотрим линейный колчан типа A_n:

$$1 \to 2 \to \ldots \to n.$$

Корни имеют вид $\pm\alpha_{ij} = \pm(e_i + \ldots + e_j)$, где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. Корни α_{ij} — положительные, соответствующие им неразложимые модули имеют вид

$$M_{ij}: \quad (0 \ldots \mathsf{k} \leftarrow \mathsf{k} \leftarrow \ldots \leftarrow \mathsf{k} \ldots 0)$$

(где k стоит в вершинах $i, i+1, \ldots, j$). Модули $M_{1j} = P_j$ проективны, модули $M_{in} = I_i$ инъективны, модули $M_{ii} = S_i$ простые.

Пример 15. Рассмотрим колчан Кронекера:

$$1 \rightrightarrows 2.$$

Форма Титса имеет вид $q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$, она неотрицательно определена, но не положительно определена. Форма имеет ядро, порождённое вектором $(1, 1)$. Корнями являются векторы $(m, m+1)$ и $(m+1, m)$, где $m \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$[P_1] = (1, 0), \quad [P_2] = (2, 1), \quad [I_1] = (1, 2), \quad [I_2] = (0, 1).$$

Преобразование Кокстера сохраняет вектор $(1, 1)$, переводит $(m+1, m)$ в $(m-1, m-2)$ и $(m, m+1)$ в $(m+2, m-1)$. Тем самым, препроективные модули взаимно-однозначно соответствуют векторам вида $(m+1, m)$, а преинъективные — векторам вида $(m, m+1)$, где $m \geqslant 0$.

Все регулярные модули имеют класс вида (m, m). Для каждого такого вектора размерности имеется одномерное семейство классов изоморфизма неразложимых модулей.