15.09.2020
Лекция 2

Гомотопическая категория комплексов

Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая абелева категория.

Когомологическим комплексом над $\mathcal{A}$ называется набор объектов $K^i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{Z}$ и морфизмов $d^i\colon K^i \to K^{i+1}$ таких, что $d^2 = 0$ (т.е. $d^{i+1} \circ d^i = 0$ при всех i). Гомоморфизмы d^i называются *дифференциалами*. Комплекс выглядит так:

$$\ldots \to K^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} K^0 \xrightarrow{d^0} K^1 \xrightarrow{d^1} K^2 \to \ldots$$

Морфизмом комплексов из (K, d_K) в (L, d_L) называется набор морфизмов $f^i\colon K^i \to L^i$ такой, что $df = fd$ (т.е., $d_L^i \circ f^i = f^{i+1} \circ d_K^i$). Морфизм комплексов выглядит так:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[d, "f^i"] & K^{i+1} \arrow[r, "d_K^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"] & L^i \arrow[r, "d_L^i"] & L^{i+1} \arrow[r, "d_L^{i+1}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Категорию комплексов над $\mathcal{A}$ мы обозначим $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, она абелева. В частности, можно говорить про подкомплексы, факторкомплексы, точные последовательности комплексов.

(Ко)циклами комплекса (K, d) называются объекты $Z^i = \ker d^i \in \mathcal{A}$, *(ко)границами* называются объекты $B^i = \operatorname{im} d^{i-1} \in \mathcal{A}$. Из-за соотношения $d^2 = 0$ имеем $B^i \subset Z^i \subset K^i$. *(Ко)гомологиями* комплекса называются $H^i = Z^i/B^i$, факторы циклов по границам. Любой морфизм комплексов индуцирует морфизмы на циклах, границах и когомологиях, там самым Z^i, B^i и H^i задают функторы $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$.

Комплекс, у которого $H^i = 0$, называется *точным* в i-м члене. Комплекс, все когомологии которого равны нулю, называется *точным* или *ацикличным*. Морфизм, индуцирующий изоморфизм в когомологиях, называется *квазиизоморфизмом*.

Важное средство вычисления когомологий комплексов — длинная точная последовательность в когомологиях.

Диаграмма в абелевой категории $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$ называется *точной в члене* L, если образ f равен ядру g. Также можно говорить и про точные последовательности из нескольких членов. Так, последовательность $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$ точна, если f инъективно, g сюръективно и $\operatorname{im}(f) = \ker(g)$. Такая последовательность называется *точная тройка* или *короткая точная последовательность*.

Рассмотрим точную тройку комплексов

$$0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0.$$

Морфизмы f и g индуцируют морфизмы когомологий $H^i(K) \to H^i(L) \to H^i(M)$. Определим так называемый *связывающий* или *граничный* гомоморфизм $\delta^i\colon H^i(M) \to H^{i+1}(K)$.

Пусть $x \in Z^i(M)$ представляет класс в $H^i(M)$. Возьмём любой $y \in L^i$ так, что $g(y) = x$, пусть $z = d(y)$ Поскольку $g(z) = gd(y) = dg(y) = d(x) = 0$, найдётся $t \in K^{i+1}$ такой, что $f(t) = z$. При этом $fd(t) = df(t) = d(z) = dd(y) = 0$, значит и $d(t) = 0$. Положим $\delta([x]) = [t] \in H^{i+1}(K)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K^{i+2} \arrow[r, "f"] & L^{i+2} & & \\
0 \arrow[r] & K^{i+1} \arrow[r, "f"] \arrow[u, "d"] & L^{i+1} \arrow[r, "g"] \arrow[u, "d"] & M^{i+1} \arrow[r] & 0 \\
 & & L^i \arrow[r, "g"] \arrow[u, "d"] & M^i \arrow[r] \arrow[u, "d"] & 0
\end{tikzcd}$$

Предложение 1. *Со всякой точной тройкой комплексов*

$$0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$$

связана длинная точная последовательность когомологий

$$\ldots \to H^{i-1}(M) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(K) \xrightarrow{H^i(f)} H^i(L) \xrightarrow{H^i(g)} H^i(M) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(K) \to \ldots$$

Задача 1. Проверьте, что δ^i корректно определено. Проверьте точность построенной длинной последовательности в когомологиях.

Сдвигом комплекса (K, d) называется комплекс $(K[1], d[1])$, где $K[1]^i = K^{i+1}, d[1]^i = -d^{i+1}$ (обратите внимание на смену знака!) Сдвиг морфизма определяется так: $f[1]^i := f^{i+1}$. Сдвиги на произвольные целые числа определяются аналогично.

Теперь определим конус морфизма $f\colon K \to L$. Положим $C^i = K^{i+1} \oplus L^i$, определим дифференциалы

$$d^i_C(k^{i+1}, l^i) = (-d(k^{i+1}), f(k^{i+1}) + d(l^i)).$$

Легко видеть, что получится комплекс, он обозначается $C(f)$ и называется *конусом* морфизма f. Пусть $a\colon L \to C(f)$ и $b\colon C(f) \to K[1]$ — вложение и проекция, это морфизмы комплексов. Они образуют точную тройку

$$0 \to L \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} K[1] \to 0.$$

Задача 2. Связывающие гомоморфизмы $H(K) \to H(L)$ для указанной точной тройки совпадают с гомоморфизмами, индуцированными f.
Задача 3. Убедитесь в том, что морфизм f — квазиизоморфизм титтк конус f ацикличен.

Морфизм комплексов $f\colon K \to L$ называется *гомотопным нулю*, если существует набор морфизмов $h^i\colon K^i \to L^{i-1}$, для которых

$$f = dh + hd,$$

т.е., $f^i = d^{i_1}h^i + h^{i+1}d^i$. Два морфизма $f, g\colon K \to L$ *гомотопны*, если их разность гомотопна нулю. Обозначение: $f \sim g$. Гомотопные нулю морфизмы образуют идеал в $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Поэтому корректно определена факторкатегория

$$\mathcal{H}(\mathcal{A}) := \mathcal{C}(\mathcal{A})/\{\text{морфизмы, гомотопные нулю}\},$$

она называется *гомотопической категорией комплексов*. Её объекты — комплексы над $\mathcal{A}$, а морфизмы определены так:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y)/\{\text{морфизмы из } X \text{ в } Y, \text{ гомотопные нулю}\}.$$

Можно проверить, что гомотопные нулю морфизмы индуцируют нулевое отображение на когомологиях. Тем самым, функторы когомологий $H^i\colon \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ пропускаются через гомотопическую категорию.

Комплекс M называется *стягиваемым*, если он изоморфен нулю в гомотопической категории. Это равносильно тому, что морфизм 1_M гомотопен нулю.

Задача 4. Проверьте, что морфизм комплексов — гомотопическая эквивалентность $\Leftrightarrow$ его конус стягиваем.

15.09.2020
Лекция 2

Пусть K и L — комплексы. Определим *комплекс морфизмов* следующим образом. Положим
$$\underline{\mathrm{Hom}}(K,L)^i = \prod_n \mathrm{Hom}(K^n, L^{n+i}),$$
а дифференциал d^i переводит семейство $(f^n) \in \underline{\mathrm{Hom}}(K,L)^i$ в семейство $(g^n) \in \underline{\mathrm{Hom}}(K,L)^{i+1}$,
$$g^n = d_L f^n - (-1)^i f^{n+1} d_K.$$
Можно проверить, что это действительно дифференциал.

Задача 5. Проверьте, что
$$\begin{aligned}
&Z^i(\underline{\mathrm{Hom}}(K,L)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(K, L[i]);\\
&B^i(\underline{\mathrm{Hom}}(K,L)) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(K, L[i]) \mid f \text{ гомотопен нулю}\};\\
&H^i(\underline{\mathrm{Hom}}(K,L)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(K, L[i]).
\end{aligned}$$

Удобно использовать обозначение:
$$\mathrm{Hom}^i(K,L) := \mathrm{Hom}(K, L[i]).$$

Предложение 2. *Пусть $f\colon K \to L$ — морфизм комплексов и X — произвольный комплекс. Тогда морфизмы*
$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} K[1]$$
индуцируют длинные точные последовательности, где $\mathrm{Hom} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}$

(1)
$$\ldots \to \mathrm{Hom}^{i-1}(X, C(f)) \to \mathrm{Hom}^i(X,K) \to \mathrm{Hom}^i(X,L) \to \mathrm{Hom}^i(X, C(f)) \to \mathrm{Hom}^{i+1}(X,K) \to \ldots$$

(2)
$$\ldots \leftarrow \mathrm{Hom}^{i+1}(C(f), X) \leftarrow \mathrm{Hom}^i(K,X) \leftarrow \mathrm{Hom}^i(L,X) \leftarrow \mathrm{Hom}^i(C(f),X) \leftarrow \mathrm{Hom}^{i-1}(K,X) \leftarrow \ldots$$

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность
$$0 \to L \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} K[1] \to 0.$$
Она почленно расщепима, поэтому применяя $\underline{\mathrm{Hom}}(X, -)$, получим точную последовательность
$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}(X,L) \to \underline{\mathrm{Hom}}(X, C(f)) \to \underline{\mathrm{Hom}}(X, K[1]) \to 0.$$
Вычисляя длинную точную последовательность в когомологиях, с помощью предыдущей задачи получим точность (1). Точность (2) проверяется аналогично. □

Определение 3. *Треугольником* в категории комплексов называется диаграмма вида
$$X \to Y \to Z \to X[1].$$
Морфизмом треугольников называется коммутативная диаграмма вида
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, "{f[1]}"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1].
\end{tikzcd}$$

Стандартным треугольником называется треугольник вида

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} X[1],$$

где f — некоторый морфизм комплексов, а морфизмы a и b были определены нами выше. *Выделенным треугольником* называется любой треугольник, изоморфный стандартному.

Из предложения 2 вытекает очевидное следствие

Следствие 4. *Пусть $K \to L \to M \to K[1]$ — выделенный треугольник в гомотопической категории, а X — произвольный комплекс. Тогда следующие индуцированные длинные последовательности морфизмов в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ точны:*

$$\ldots \to \mathrm{Hom}^{i-1}(X,M)) \to \mathrm{Hom}^{i}(X,K) \to \mathrm{Hom}^{i}(X,L) \to \mathrm{Hom}^{i}(X,M) \to \mathrm{Hom}^{i+1}(X,K) \to \ldots$$

$$\ldots \leftarrow \mathrm{Hom}^{i+1}(M,X) \leftarrow \mathrm{Hom}^{i}(K,X) \leftarrow \mathrm{Hom}^{i}(L,X) \leftarrow \mathrm{Hom}^{i}(M,X) \leftarrow \mathrm{Hom}^{i-1}(K,X) \leftarrow \ldots$$

Теперь построим производную категорию комплексов. Для этого нужно формально обратить все квазиизоморфизмы между комплексами. Чтобы это сделать, используется понятие локализации категории по классу морфизмов.

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольная категория, S — произвольный класс морфизмов в $\mathcal{C}$. *Локализацией категории $\mathcal{C}$ по S* называется категория $\mathcal{C}[S^{-1}]$ вместе с функтором $q\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ такие, что:

1. q переводит морфизмы из S в изоморфизмы;
2. любой функтор $\phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, переводящий S в изоморфизмы, пропускается через единственный с точностью до изоморфизма функтор $\phi'\colon \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$, т.е. $\phi \cong \phi' q$.

Теорема 5. *Локализация категорий существует и единственна.*

Мы не будем доказывать эту теорему (хотя это и несложно). Из теоремы 5 следует существование и единственность производной категории, а также её конструктивное описание. Однако это описание во многих отношениях неудобно. Так, множество морфизмов описывается очень неявно, и на практике трудно проверять, эквивалентны ли два морфизма, заданные в виде слов. Также из полученного описания множества морфизмов неясно, как определять на них сложение. Проблема в том, что морфизмы в категории не коммутируют (в отличие от элементов коммутативного кольца, локализция которого описывается просто). Из-за этого диаграммы стрелок, задающие морфизмы, плохо приводятся к удобному виду. Оказывается, что описание морфизмов в локализованной категории заметно упрощается, если класс S удовлетворяет следующим условиям, так называемым *правым условиям Оре*. Эти условия — некоторая имитация коммутативности морфизмов.

(Правые) условия Оре:

1. S насыщен: все тождественные морфизмы лежат в S и если два морфизма среди f, g, fg лежат в S, то и третий лежит в S;
2. для любых f и s, $s \in S$ существуют g и t, $t \in S$, делающие диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} X & Z' \arrow[l, "t"'] \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[from=u, "f"] & Y \arrow[l, "s"] \end{tikzcd};$$

3. если для пары морфизмов f_1 и f_2 существует левый уравнитель: такое $s \in S$, что $sf_1 = sf_2$, то существует и правый уравнитель: такое $t \in S$, что $f_1 t = f_2 t$.

Аналогично можно определить левые условия Оре.

Если в $\mathcal{C}$ выполнены правые условия Оре, то морфизмы в локализации $\mathcal{C}$ по S можно описать как правые дроби вида fs^{-1}: в некоммутативных длинных дробях все знаменатели можно перевести вправо.

Предложение 6. *Пусть S — класс морфизмов в категории $\mathcal{C}$, удовлетворяющий правым условиям Оре. Тогда локализация $\mathcal{C}[S^{-1}]$ допускает следующее описание. Объекты — объекты $\mathcal{C}$, а морфизмы из X в Y — классы эквивалентности домиков вида*

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y.
\end{tikzcd}$$

Два домика fs^{-1} и $f'(s')^{-1}$ считаются эквивалентными, если существует коммутативная диаграмма с $t, t' \in S$

$$\begin{tikzcd}
& & W \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "t'"] & & \\
& Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "f"' near end] & & Z' \arrow[dlll, "s'" near end] \arrow[dr, "f'"] & \\
X & & & & Y.
\end{tikzcd}$$

Композиция морфизмов fs^{-1} и gt^{-1} определяется так: найдём f' и $t' \in S$ такие, что $ft' = tf'$, и определим композицию как $(gf')(st')^{-1}$:

$$\begin{tikzcd}
& & X'' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "f'"] & & \\
& W \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"'] & & W' \arrow[dl, "t"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z.
\end{tikzcd}$$

Доказательство предложения 2, план. Для начала, необходимо проверить следующее:

1. введённое отношение на домиках — отношение эквивалентности;

2. определение композиции морфизмов не зависит от выбора t' и f';

3. определение композиции морфизмов не зависит от выбора домика в классе эквивалентности;

4. композиция ассоциативна;

5. единичным морфизмом служит домик $1_X 1_X^{-1}$.

Тем самым, действительно определена категория, обозначим её $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Построим функтор q из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}[S^{-1}]$: объект X переходит в X, морфизм $f\colon X \to Y$ переходит в домик $f \circ 1_X^{-1}$.

Далее необходимо проверить, что это действительно функтор (т.е. тождественные морфизмы переходят в тождественные и композиция переходит в композицию) и что он будет локализацией. Первое очевидно. Покажем, что q — локализация.

Во-первых, для $s\colon X \to Y, s \in S$ морфизм $q(s) = s \circ 1_X^{-1}$ — изоморфизм, обратным служит домик $1_X \circ s^{-1}$. Во-вторых, пусть дан функтор $\phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, обращающий все морфизмы из S. Построим функтор $\phi'\colon \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$, чтобы $\phi = \phi' \circ q$. На объектах ϕ' совпадает с ϕ, на морфизмах положим $\phi'(fs^{-1}) := \phi(f)\phi(s)^{-1}$ (заметим, что $\phi(s)$ обратим в категории $\mathcal{D}$). Теперь остаётся проверить, что это определение не зависит от выбора домика в классе эквивалентности, что ϕ' уважает единицы и композицию, и что ϕ' единственный. $\square$

Задача 6. Проделайте все (или хотя бы некоторые) необходимые проверки в доказательстве теоремы 6. Найти, где нужно третье условие Оре.

Если класс морфизмов S в аддитивной категории $\mathcal{C}$ удовлетворяет (правым) условиям Оре, то можно ввести сложение на морфизмах. Пусть fs^{-1} и $f'(s')^{-1}$ — два морфизма из X в Y. Пользуясь условиями 1 и 2, их можно привести к общему знаменателю, то есть представить в виде fu^{-1} и $f'u^{-1}$ для некоторого $u \in S$. Теперь можно определить сумму fu^{-1} и $f'u^{-1}$ как $(f + f')u^{-1}$.

Предложение 7. *Введённое сложение превращает $\mathcal{C}[S^{-1}]$ в аддитивную категорию, а $q\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ — в аддитивный функтор.*

Задача 7. Доказать это предложение.

Вернёмся к категориям комплексов. Обозначим через QIS класс квазиизоморфизмов в $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Замечание 8. В категории комплексов $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, как правило, условия Оре для QIS не выполнены.

Задача 8. Приведите примеры, показывающие, что условия Оре 2 и 3 не всегда выполнены для класса QIS в категории $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Однако условия Оре будут выполняться, если перейти к гомотопической категории комплексов.

Предложение 9. *Класс квазиизоморфизмов в гомотопической категории $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ комплексов над $\mathcal{A}$ удовлетворяет правым условиям Оре.*

Доказательство. Первое условие очевидно.

Проверим второе, пусть $f\colon X \to Z$ — морфизм комплексов, а $s\colon Y \to Z$ — квазиизоморфизм. Рассмотрим конус $C(s)$ и морфизм $h\colon Z \to C(s)$. Теперь возьмём в качестве $t\colon Z' \to X$ естественный морфизм $C(hf)[-1] \to X$. Так как s — квазиизоморфизм, из длинной точной последовательности когомологий, связанной с $0 \to Z \to C(s) \to Y[1] \to 0$, получаем, что $C(s)$ ацикличен. А из длинной точной последовательности когомологий, связанной с $0 \to (s) \to C(hf) \to X[1] \to 0$, получаем, что t — квазиизоморфизм.

Теперь построим морфизм $g\colon Z' \to Y$, такой что sg гомотопно ft. По предложению 2 имеется длинная точная последовательность морфизмов в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$:

$$\ldots \to \mathrm{Hom}(Z', Y) \to \mathrm{Hom}(Z', Z) \to \mathrm{Hom}(Z', C(s) \to \ldots$$

Морфизм $ft\colon Z' \to Z$ переходит в ноль, так как hft гомотопно нулю. Значит, требуемый морфизм g найдётся.

Аналогично проверяется третье условие Оре. $\square$

Задача 9. Проверьте его.

Определение 10. Производной категорией $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ от абелевой категории $\mathcal{A}$ мы будем называть локализацию $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ по классу QIS квазиизоморфизмов.

По предложению 7, производная категория и функтор локализации $q\colon \mathcal{H}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ аддитивны.

Замечание 11. Можно показать, что естественный функтор $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ также есть локализация по QIS.