**НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 8.**
**Гладкие многообразия, гладкие отображения. 10.12.2020.**

**Задача 1.** Пусть $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t$, а $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$ — это вещественная прямая с максимальным атласом, порождённым картой $t \mapsto t^3$. Доказать, что $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_3$, но $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ и $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_3)$ диффеоморфны.

**Задача 2.** Множество $k$-плоскостей в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией называется многообразием Грассмана $G_k(\mathbb{R}^n)$. По аналогии с проективными пространствами ввести на многообразии Грассмана однородные и неоднородные координаты и доказать, что $G_k(\mathbb{R}^n)$ является гладким многообразием. Какова его размерность?

**Задача 3.** Множество ортонормированных $k$-реперов с началом в точке $(0, \ldots, 0)$ в $\mathbb{R}^n$ с естественной топологией называется многообразием Штифеля $V_k(\mathbb{R}^n)$. Доказать, что это гладкое многообразие. Найти размерность. Чему диффеоморфны $V_1(\mathbb{R}^n)$ и $V_n(\mathbb{R}^n)$?

**Задача 4.** Ввести на бутылке Клейна с естественной топологией структуру гладкого многообразия.

**Задача 5.** Доказать, что гладкое отображение $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ не может быть инъективным.

**Задача 6.** Описать в терминах объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$ касательное пространство $T_P\mathbb{S}^2$ к сфере $\mathbb{S}^2$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

в точке $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Пусть $X$ такой касательный вектор в точке $P$, что его координаты, соотвествующие стереографической проекции из северного полюса равны $(1, 1)$. Найти координаты этого вектора, соотвествующие стереографической проекции из южного полюса. Пусть $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ограничение функции $z$ на сферу. Найти $Xf$.

**Задача 7.** Доказать следующую теорему об обратной функции для многообразий. Пусть $f : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_pf : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ является изоморфизмом. Тогда существует такая окрестность $U$ точки $p$, что отображение $\psi : U \longrightarrow \psi(U)$ является диффеоморфизмом на открытое множество $\psi(U)$.

**Задача 8.** Пусть $M$ многообразие размерности $k$, а $f_1, \ldots, f_k$ такие функции на $M$, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки $p$ функции $f_1, \ldots, f_k$ можно взять в качестве локальных координат.

**Задача 9.** Пусть $M$ многообразие размерности $k$, а $f_1, \ldots, f_l$, $l < k$, такие функции на $M$, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки $p$ функции $f_1, \ldots, f_l$ можно дополнить до системы локальных координат.

**Задача 10.** Пусть $f : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_pf : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ сюръективно. Доказать, что если в окрестности $f(p) \in N$ функции $x^1, \ldots, x^l$ образуют локальную систему координат, то функции $x^1 \circ f, \ldots, x^l \circ f$ можно дополнить до системы локальных координат в некоторой окрестности точки $p$.