**НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 1.**
**Области аффинного пространства, криволинейные координаты, замены криволинейных координат. Функции, векторы как дифференцирования функций, векторные поля. Коммутатор векторных полей. Обратный образ функции при отображении. Дифференциал отображения. 10.09.2020.**

**Задача 1.** Пусть $r$, $\varphi$ полярные координаты в плоскости, а $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ декартовы. Записать функцию $\sin 2\varphi$ в декартовых координатах.

**Задача 2.** Написать замену координат, описывающую переход от цилиндрических координат к сферическим.

**Задача 3.** Доказать, что семейства конфокальных эллипсов и гипербол пересекаются ортогонально, и введите с помощью этого ортогональную криволинейную систему координат в первом квадранте плоскости.

**Задача 4.** Найти производную функции $f(x,y) = x^2 - y^2$ вдоль вектора $\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial y}$ в точке $(1,1)$.

**Задача 5.** Найти производную функции $f(x,y) = x^2 - y^2$ вдоль векторного поля $y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$.

**Задача 6.** Пусть $r$, $\varphi$ полярные координаты в плоскости, а $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ декартовы. Записать векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial r}, \quad Y = r\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

в декартовых координатах.

**Задача 7.** Пусть $r$, $\varphi$ — полярные координаты в плоскости. Найти коммутатор векторных полей

$$X = \frac{\partial}{\partial r}, \quad Y = r\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

**Задача 8.** Записать в полярных координатах какие-нибудь два коммутирующих векторных поля на плоскости.

**Задача 9.** Рассмотрим отображение $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, заданное формулами

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Пусть функция $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ задана формулой $\varphi(u,v) = u^2 + v^2$. Найти $F^*\varphi$.

**Задача 10.** Найти дифференциал отображения $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, заданного формулами

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Проверьте, что он коммутирует с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можете ли вы это объяснить?