НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях.
Экзамен. 17.12.2020.

Решения надо __*не позднее*__ *24 декабря отсканировать (в самом крайнем случае сфотографировать на телефон) и прислать А.В.Пенскому на электронную почту. Просьба нумеровать страницы, чтобы было понятно в каком порядке читать и не забывать написать свою фамилию!*

Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день. Для того, чтобы экзамен был засчитан в НМУ, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее 3 задач.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно».

Задача 1. Рассмотрим неособую плоскую кривую $\gamma(t)$. Предположим, что точки $\gamma(t)$, $\gamma(t+\varepsilon)$ и $\gamma(t-\varepsilon)$ находятся в общем положении. Обозначим радиус проведённой через эти три точки окружности через $R(t,\varepsilon)$. Найти $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} R(t,\varepsilon)$. *(5 баллов).*

Задача 2. Рассмотрим кривую в трёхмерном евклидовом пространстве, у которой кривизна не обращается в ноль. Пусть $\mathbf{w}$ некоторый постоянный вектор. Доказать, что если в каждой точке кривой соответствующая нормальная плоскость (то есть плоскость, порождённая векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ из репера Френе) содержит вектор $\mathbf{w}$, то кривая плоская *(5 баллов).*

Задача 3. Поверхность называется *линейчатой,* если она параметрически задается в виде $\vec{r}(u,v)=\vec{\rho}(u)+v\vec{a}(u)$. Докажите, что на линейчатой поверхности гауссова кривизна всюду неположительна *(5 баллов).*

Задача 4. Из аналитической геометрии вы знаете примеры поверхностей, на которых есть два различных семейства прямолинейных образующих. Докажите, что если на гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является куском плоскости *(10 баллов).*

Задача 5. Пусть $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e_2}$ образуют ортонормальный базис в касательном пространстве в точке p двумерной поверхности в $\mathbb{E}^3$. Докажите, что

$$H=\mathbf{II}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)+\mathbf{II}(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2).$$

(5 баллов).

Задача 6. Пусть $[z_0:\ldots:z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{RP}^n$. *Отображение Веронезе* степени d — это отображение $\nu_d:\mathbb{RP}^n\longrightarrow\mathbb{RP}^N$, заданное формулой

$$\nu_d([z_0:\ldots:z_n])=[\ldots:z^I:\ldots], \tag{1}$$

где z^I это некоторый моном степени d от $z_0,\ldots,z_n$, а в правой части (1) стоят все мономы степени d. Например, при $n=2$ и $d=2$ получаем отображение $\mathbb{RP}^2\longrightarrow\mathbb{RP}^5$, заданное формулой $\nu_2([z_0:z_1:z_2])=[z_0^2:z_1^2:z_2^2:z_0z_1:z_0z_2:z_1z_2]$. Доказать, что отображение Веронезе — гладкое отображение. Описать образ отображения Веронезе. (5 баллов).

Задача 7. Пусть M — связное многообразие. Докажите, что для любых двух точек $x,y\in M$ существует автоморфизм M (то есть диффеоморфизм M на себя), переводящий x в y. (10 баллов).

Задача 8. Доказать, что подмножество $\{A|\det(A+I)=0\}$ группы $\mathrm{SO}(3)$ диффеоморфно $\mathbb{R}P^2$. (15 баллов).