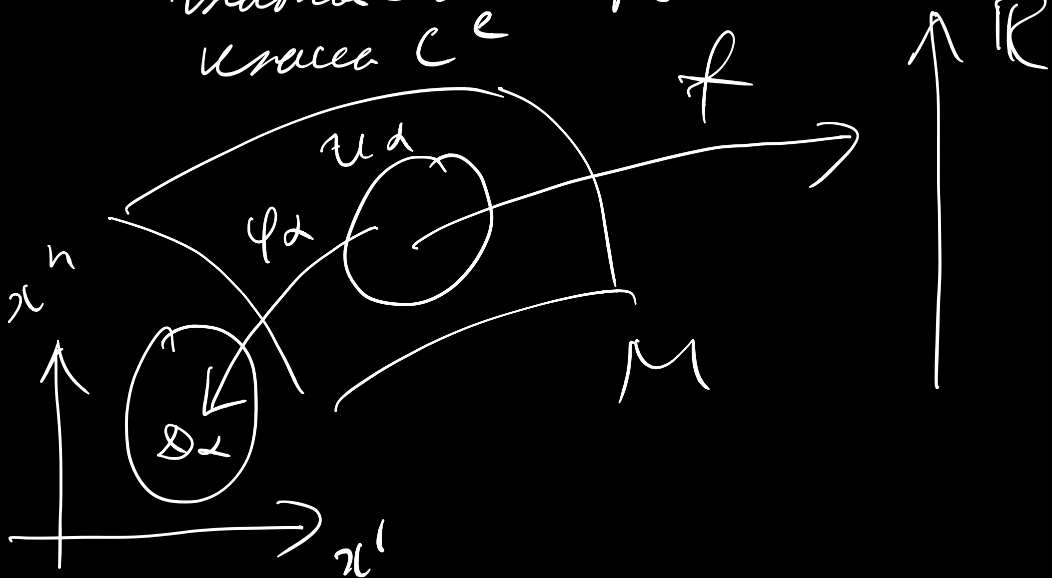
Анализ на многообразиях.
Лекция 13.

M мн-е р-ти n

$f: M \to \mathbb{R}$

гладкое многообразие класса C^{ℓ}

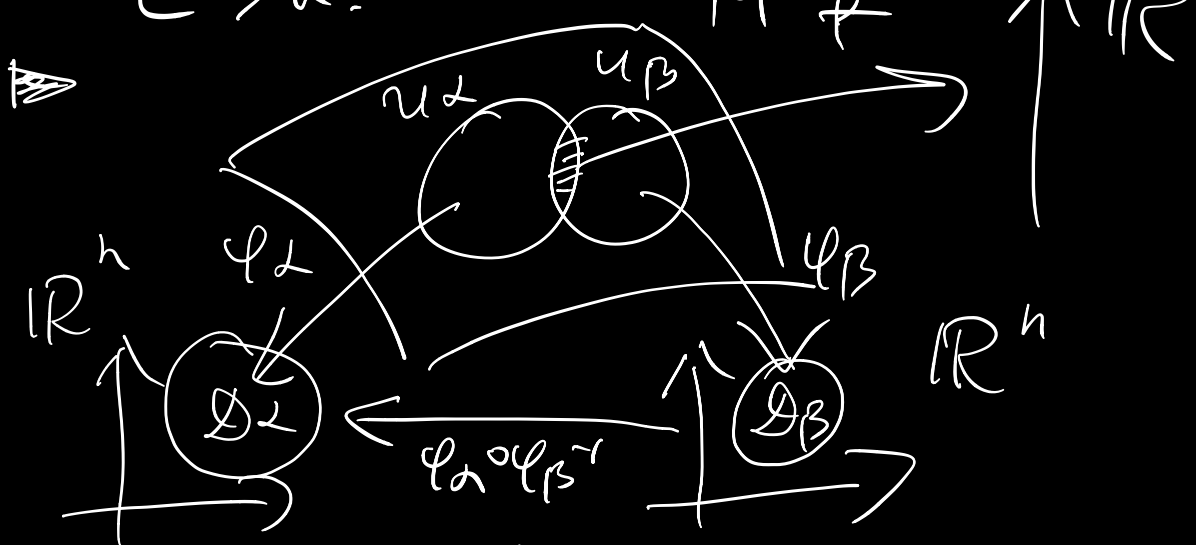


$$f \circ \varphi_\alpha^{-1} : D_\alpha \to \mathbb{R}, \quad D_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

<u>Опр</u> $f: M \to \mathbb{R}$ является гладкой класса C^k, если $\forall$ карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ функция $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является гладкой класса C^k.

Утв. Это определение корректно, если $\ell \geq k$.

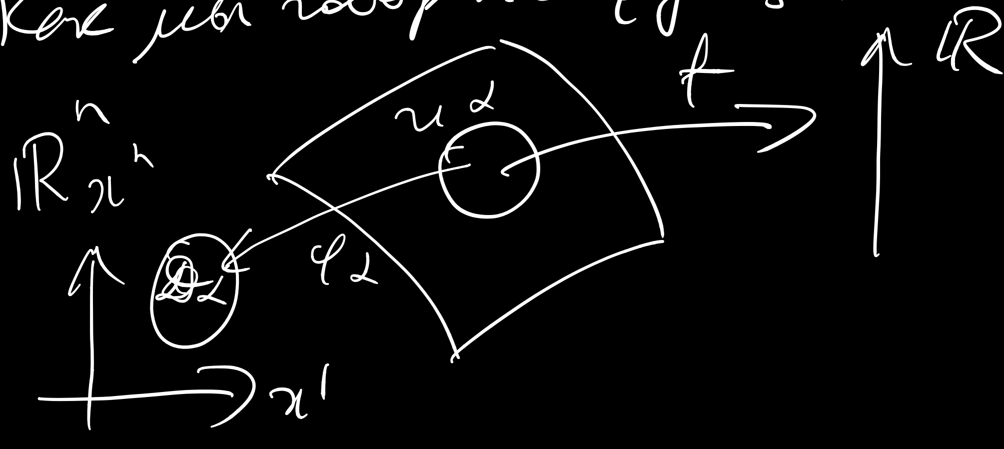
▷



$$f \circ \varphi_\beta^{-1} = \underbrace{(f \circ \varphi_\alpha^{-1})}_{C^k} \circ \underbrace{(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})}_{C^\ell}$$

$\Rightarrow f \circ \varphi_\beta^{-1}$ имеет гладкость степени $\geq \min(k, \ell) = k$ ◁

Как мы говорим о функциях?



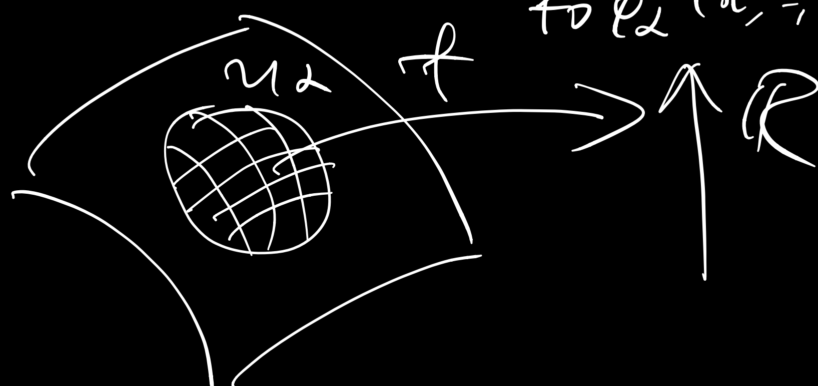
$A \in U_\alpha \subset M \qquad f(A) \in \mathbb{R}$

$f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \circ \varphi_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n)$

мы говорим и пишем f в координатах $x^1, \dots, x^n$ имеет вид $\underset{\sim\sim\sim}{f(x^1, \dots, x^n)}$

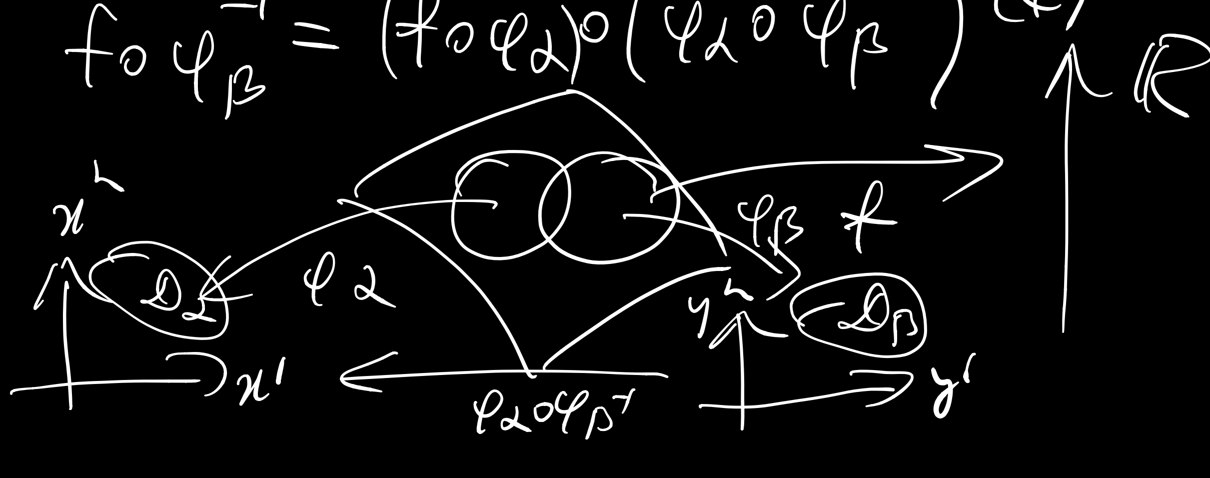
на самом деле это $f \circ \varphi_\alpha^{-1}(x^1, \dots, x^n)$



<u>замена координат:</u>

на самом деле

$$f \circ \varphi_\beta^{-1} = (f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \quad (*)$$



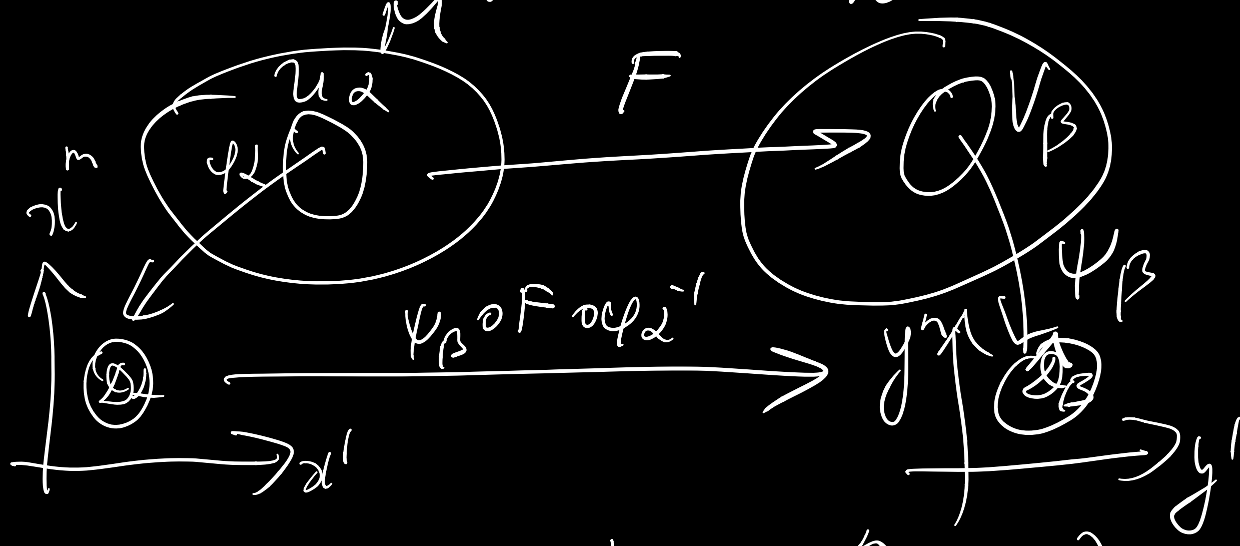
мы пишем (*) как

$$f(y^1,\dots,y^n) = f(x^1(y^1,\dots,y^n),\dots,x^n(y^1,\dots,y^n))$$

где замена к-т $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ пишется как

$$x^1 = x^1(y^1,\dots,y^n)$$
$$\vdots$$
$$x^n = x^n(y^1,\dots,y^n)$$

Гладкие отображения многообразий



$$\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad (*)$$

$$F : M \to N$$

Опр Отображение гладкого многообразия M в гладкое многообразие N гладкое класса C^l, если $\forall$ карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ на M и (V_β, ψ_β) на N отображение (*) гладкое класса C^ℓ.

M — класса C^p

N — класса C^q

Ув. Определение гладкости F корректно при $\ell \le \min(p,q)$

▷ $\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1} =$

$$= (\psi_\beta \circ \psi_\delta^{-1}) \circ (\psi_\delta \circ F \circ \varphi_\gamma) \circ (\varphi_\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1})$$ ◁

Мы пишем и говорим не

$\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$ или

$(y^1,\dots,y^n) = \psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}(x^1,\dots,x^m)$, а

говорим/пишем, что F в локальных координатах $x^1,\dots,x^m$ на M и $y^1,\dots,y^n$ на N имеет вид

$$y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n)$$
$$\vdots$$
$$y^n = y^n(x^1, \dots, x^n)$$

Упр Д-ть, что если $F: M \to N$ гладкое класса C^k и $G: N \to L$ гладкое класса C^ℓ, то $G \circ F: M \to L$ гладкое класса $C^{\min(k,\ell)}$.

Что такое векторы на гладком многообразии?

Пусть M – многообразие класса C^∞.

Тогда есть алгебра C^∞-гладких функций $C^\infty(M)$

$U \subset M \qquad C^\infty(U)$

Опр. Дифференцирование $\mathcal{D}$ в точке A гладких функций на M — это отображение, сопоставляющее гладкой функции f, определенной в некоторой окрестности A, число, причем

1) $\mathcal{D}(f_1+f_2) = \mathcal{D}f_1 + \mathcal{D}f_2$

2) $\mathcal{D}(fg) = (\mathcal{D}f)\,g(A) + f(A)(\mathcal{D}g)$

Утв. Если есть локальные к-ты $x^1,\dots,x^n$, то

$$\mathcal{D} = \underbrace{Y^1}_{\in\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x^1}+\dots+\underbrace{Y^n}_{\in\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_A \quad (*)$$

— это дифференцирование

$$\mathcal{D}f = Y^1\frac{\partial f}{\partial x^1}(A)+\dots+Y^n\frac{\partial f}{\partial x^n}(A)$$

Теорема: Любое дифференцирование устроено как $(*)$

▶ Напоминание:

$$f(x^1,\dots,x^n) = f(\underbrace{A^1,\dots,A^n}_{\text{к-ты } A}) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(A^1,\dots,A^n)(x^i - A^i) +$$

$$+\underset{\overset{\cap}{C^\infty}}{h_{ij}}(x^1,\dots,x^n)(x^i-A^i)(x^j-A^j) \Rightarrow$$

$$\mathcal{D}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(A^1,\dots,A^n)\underbrace{\mathcal{D}(x^i-A^i)}_{\overset{\shortparallel}{\bar{Y}^i}}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}f = Y^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(A^1,\dots,A^n) \quad \blacktriangle$$

Это работает только для C^∞-функций на C^∞-многообразии.

<u>**Опр**</u> На C^∞-многообразии касательный вектор в точке A — это дифференцирование гладких функций в точке A.

$\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ $\quad \bar{X}$

$\exists\, \gamma$ на Σ, что $\gamma(0)=A$, $\dot\gamma(0)=\bar{X}$

касат. векторы - настоящие векторы в $\mathbb{R}^n$

$$\partial_{\underline{X}} f(A) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0}$$

<u>Упр</u> $\partial_{\underline{X}} f = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(A) + \dots$

M мн-е
нет объемлющего $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ определяем
вектор сразу как дифференцирование
функций.

M мн-е

Z вектор в точке A =

= дифференцирование

$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ карта, $U_\alpha \ni A$

локальные к-ты $x^1, \dots, x^n$

$$Z = \underset{\in \mathbb{R}}{Z^1} \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_A + \dots + \underset{\in \mathbb{R}}{Z^n} \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_A$$

(U_β, φ_β) другая карта, $U_\beta \ni A$

Локальные к-ты $y^1,\dots,y^n$

$$Z = \underset{\in\mathbb{R}}{\hat{Z}^1}\frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_A + \dots + \underset{\in\mathbb{R}}{\hat{Z}^n}\frac{\partial}{\partial y^n}\Big|_A$$

$(Z^1,\dots,Z^n)$ – координаты вектора Z в системе к-т $x^1,\dots,x^n$

$(\hat{Z}^1,\dots,\hat{Z}^n)$ – координаты вектора Z в системе к-т $y^1,\dots,y^n$

Вопрос Как они связаны?

<u>Правило дифференцирования сложной ф-ции</u>

$$Zf = Z^1\frac{\partial f}{\partial x^1}(A) + \dots + Z^n\frac{\partial f}{\partial x^n}(A) =$$

$$= Z^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(A) =$$

$$f(y^1(x^1,\dots,x^n),\dots,y^n(x^1,\dots,x^n)) = f(x^1,\dots,x^n)$$

$$= Z^i \frac{\partial f}{\partial y^j}(A) \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(A) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(A)\, Z^i}_{\hat{Z}^j} \frac{\partial f}{\partial y^j}(A)$$

Итог При замене к-т

$$\hat{Z}^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(A)\, Z^i$$ или

$$\begin{pmatrix} \hat{Z}^1 \\ \vdots \\ \hat{Z}^n \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(A) \right) \begin{pmatrix} Z^1 \\ \vdots \\ Z^n \end{pmatrix}$$

Матрица Якоби замены к-т в точке A

Формализм штрихованных к-т.

Вместо старых и новых к-т

$x^1,\dots,x^n$ $\qquad$ $y^1,\dots,y^n$

обычно пишут

$x^1,\dots,x^n$ $\qquad$ $x^{1'},\dots,x^{n'}$

(вместо $(x')^1,\dots,(x')^n$)

$Z = Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ $\qquad$ $Z = Z^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$

Тогда

$$\boxed{Z^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} Z^i}$$

__Опр__ Пусть M — мн-е класса C^k. Тогда касательный вектор Z в точке A — это сопоставление каждой локальной системе к-т $x^1,\dots,x^n$ в окрестности точки A упорядоченный набор n чисел

$(Z^1,\dots,Z^n)$, причём при замене к-т $x^1,\dots,x^n$ на $x^{1'},\dots,x^{n'}$ наборы $(Z^1,\dots,Z^n)$ и $(Z^{1'},\dots,Z^{n'})$ связаны как

$$\boxed{Z^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(A)\, Z^i}$$

<u>Опр</u> Мн-во касательных векторов в точке A называется касательным пространством к многообразию M в точке A.

$T_A M$

$M \ni A$ $x^1,\dots,x^n$ лок. к-ты

$$X \in T_A M \Rightarrow X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

<u>Утв</u> $T_A M$ – векторное пр-во

▶ $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ – дифференцирования $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ и $\underset{\lambda \in \mathbb{R}}{\lambda} \mathcal{D}$ тоже

Дифференцирование

$$\mathcal{D}_1 = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \mathcal{D}_2 = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} -$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 = (X^i + Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i} -$$

$$\lambda \mathcal{D}_1 = (\lambda X^i) \frac{\partial}{\partial x^i} - \blacktriangleleft$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right] & N \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

мн-во $\qquad$ множество

$$F^* \varphi = \varphi \circ F$$

обратный образ

ф-ции φ при отображении F

$$F^* \varphi \xleftarrow{\ F^*\ } \varphi$$

ф-ция на M $\qquad$ ф-ция на N

Утв Если M, N — гладкие, F и φ — тоже гладкие, то $F^*\varphi$ гладкая ф-ция.

Опр Пусть $F: M \to N$ гладкое отображение многообразий. Тогда $\forall A \in M$ определено отображение

$$d_A F : T_A M \longrightarrow T_{F(A)} N,$$

называемое дифференциалом F в точке A, где

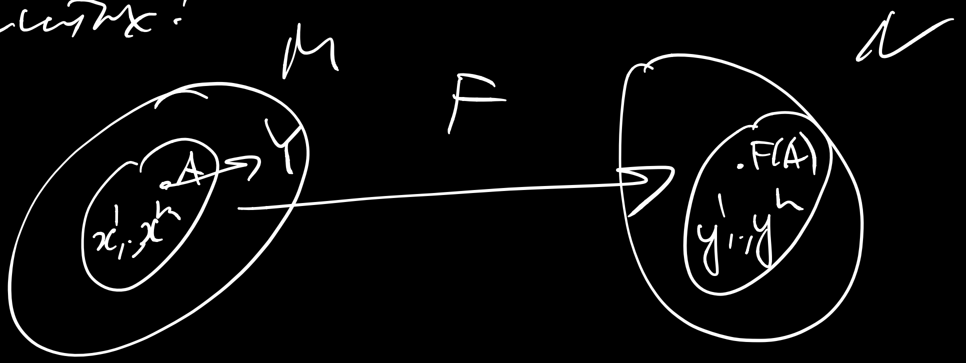
$$\underbrace{d_A F(\underset{T_A M}{\underset{\cap}{Y}})}_{\underset{T_{F(A)} N}{\cap}} \underset{C^\infty(N)}{\underset{\cap}{\varphi}} = Y(F^*\varphi)$$

$$M \xrightarrow{F} N$$

$$Y \xmapsto{d_A F} d_A F(Y)$$

$$F^*\varphi \xleftarrow{F^*} \varphi$$

Вопрос: как $d_A F$ устроен в локальных координатах?



F в локальных к-тах $x^1,..,x^n$ на M и $y^1,..,y^n$ на N имеет вид

$$y^1 = y^1(x^1,..,x^m)$$
$$\vdots$$
$$y^n = y^n(x^1,..,x^n)$$

$$Y \in T_A M \Rightarrow Y = Y^1 \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_A + \dots + Y^m \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_A$$

φ на N в локальных к-тах $y^1,..,y^n$ имеет вид $\varphi(y^1,..,y^n)$

$F^*\varphi = \varphi \circ F$ в лок. коорд $x^1,..,x^n$ на M имеет вид $F^*\varphi(x^1,..,x^n) =$

$$= \varphi(y^1(x^1,..,x^n),..,y^n(x^1,..,x^n))$$

Тогда

$$Y(F^*\varphi) = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_A \varphi(y^1(x^1,..,x^n),..,y^n(x^1,..,x^n)) =$$

$$= Y^i \frac{\partial \varphi_{(F(A))}}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(A) =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(A)\, Y^i}_{d_AF(Y)} \frac{\partial \varphi}{\partial y^j}(F(A))}_{d_AF(Y)\,\varphi}$$

$\Rightarrow$ то есть получаем утверждение.

Утв $$(d_AF(Y))^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(A)\, Y^i$$

матрица Якоби F

$$\begin{pmatrix} d_A F(Y)^1 \\ \vdots \\ d_A F(Y)^n \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(A)\right)\begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix} \quad (*)$$

(Согласовано с определением $d_A F$ для $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ из анализа)

Утв $d_A F : T_A M \to T_{F(A)} N$ — линейный оператор

⊳ или из явного вида $(*)$ или

$$d_A F(\alpha Y + \beta Z)\varphi =$$
$$= (\alpha Y + \beta Z) F^* \varphi =$$
$$= \alpha Y(F^*\varphi) + \beta Z(F^*\varphi) =$$
$$= \alpha\big(d_A F(Y) + \beta\, d_A F(Z)\big)\varphi \quad ◀$$

Важный частный случай

$f: M \to N = \mathbb{R}$

вещественнозначные ф-ции.

$d_A f: T_A M \to T_{f(A)}\mathbb{R}$

$T_{f(A)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ $\qquad \underset{\mathbb{R}}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow \underset{\mathbb{R}}{\alpha}$

$d_A f: T_A M \to T_{f(A)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$

$d_A f(Y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} Y^i\right)\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i} Y^i}_{\text{число}}$

Опр Для $f: M \to \mathbb{R}$

$d_A f(Y) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(A)\, Y^i \in \mathbb{R}$

Замечание: это значит, что это ковектор

$$d_A f \in (T_A M)^*$$

Векторное поле Z

Опр. Векторное поле Z в области $U \subset M$ — это отображение

$$Z : U \to \bigsqcup_{A \in U} T_A M,$$ т.ч.

$$Z(A) \in T_A M.$$

Опр. Векторное поле Z гладкое, если $\forall$ гладкой ф-ии φ ф-ция $Z\varphi$ гладкая

$$(Z\varphi)(A) := Z(A)\varphi$$

Утв. Векторное поле Z гладкое $\Leftrightarrow$ в любых локальных к-тах $x^1,\dots,x^n$ координатные ф-ции $Z^1,\dots,Z^n$ гладкие.

$$\left(Z = Z^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\dots+Z^n\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

ф-ции от т.

▷ $\Rightarrow$ Z - гладкое $\Rightarrow$

$\Rightarrow Z\underset{\text{гладк}}{x^i} = Z^i$ гладкие

$\Leftarrow$ $Z^1,\dots,Z^n$ гладкие, φ - гладкое $\Rightarrow$

$\Rightarrow Z\varphi = Z^1\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}+\dots+Z^n\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}$ гладкое ◄

M - многообразие

$TM = \bigsqcup_{A\in M} T_A M$ множество

TM можно снабдить структурой гладкого многообразия ("касательное расслоение")

Упр Пусть M и N — гладкие многообразия. Введите на $M \times N$ структуру гладкого многообразия.