Анализ на многообразиях, лекция 8.

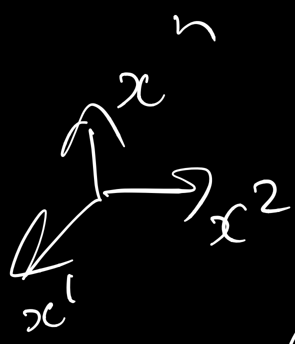
$\partial_X f$ есть и в афф. пр-ве, и на поверхности, и на абстрактном многообразии (для касательного X)

X - вектор, f - функция

Y - векторное поле

$$\partial_X Y(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Y(A+\varepsilon X) - Y(A)}{\varepsilon}$$

работает в аффинном пр-ве или (для касательных X) на поверхности в аффинном пр-ве

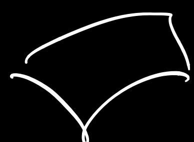


$$Y = (Y^1, \dots, Y^n) \leftarrow$$ к-ты в объемлющем $\mathbb{R}^n$

$$(\partial_X Y)^i = \partial_X Y^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}$$

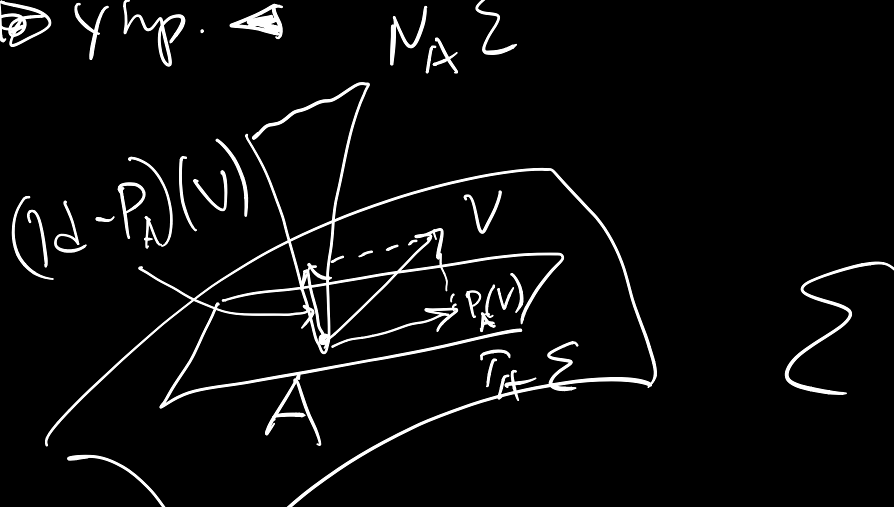
__Следствие__ Если X, Y — в. поле в афф. пр-ве, то $[X,Y] = \partial_X Y - \partial_Y X$

□ т.к. $[X,Y]^i = X^j \dfrac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \dfrac{\partial X^i}{\partial x^j}$ ■

__Утв__  $\Sigma^k \subset \mathbb{R}^n$

X, Y — касательные векторные поле на Σ, то $[X,Y]$ — тоже касательное векторное поле

□ Упр. ■



$\dim T_A\Sigma = \dim \Sigma = k$

$N_A\Sigma = (T_A\Sigma)^\perp \Rightarrow \dim N_A\Sigma = n - k$

$P_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ортогональный проектор на $T_A\Sigma$

$\uparrow$

гладко зависит от A

$r_{u_1}, \dots, r_{u_k}$ гладко зависят от точки

$\downarrow$ ортогонализация по Г-Ш

$e_1, \dots, e_k$ о/нормированы гладко зависят от точки

$$P(v) = \langle e_1, v\rangle e_1 + \dots + \langle e_k, v\rangle e_k$$

матрица P гладко зависит от точки $\Rightarrow$

Утв P – гладкое поле операторов

Y – касательное векторное поле

ξ – нормальное векторное поле

X – касательный вектор

$$\partial_X Y = \underbrace{P(\partial_X Y)}_{\nabla_X Y} + \underbrace{(Id - P)(\partial_X Y)}_{B(X,Y)}$$

$$\partial_X \xi = \underbrace{P(\partial_X \xi)}_{-W_\xi(X)} + \underbrace{(Id - P)(\partial_X \xi)}_{\nabla^{NM}_X \xi}$$

$\Gamma(T\Sigma)$ множество касательных векторных полей на Σ

$\Gamma(N\Sigma)$ мн-во нормальных векторных полей на Σ

$$B(X,Y) = (Id - P)(\partial_X Y)$$

<u>Опр</u> B — вторая квадратичная форма

1) $B : T_A\Sigma \times \Gamma(T\Sigma) \to N_A\Sigma$

2) если X — касат. в. поле, $B(X,Y)$ — нормальное в. поле. т.е.

$B : \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \to \Gamma(N\Sigma)$

3) B линейно по X,

$B(X_1 + X_2, Y) = B(X_1, Y) + B(X_2, Y)$,

$B(fX, Y) = fB(X, Y)$

▷ из линейности $\partial_X Y$ по X и линейности $\mathrm{Id} - P$ ◁

4) пусть $X, Y \in \Gamma(T\Sigma)$, тогда

$B(X, Y) = B(Y, X)$

▷ $B(X, Y) - B(Y, X) =$

$$= (\mathrm{Id} - P)(\partial_X Y) - (\mathrm{Id} - P)(\partial_Y X) =$$

$$= (\mathrm{Id} - P)(\partial_X Y - \partial_Y X) =$$

$$= (\mathrm{Id} - P)(\underbrace{[X, Y]}_{\text{касательное поле}}) = 0$$ ◁

5) $B(X, Y)(A)$ зависит только от $X(A)$ и $Y(A)$

$\Rightarrow B(X,Y) = B(Y,X)$

$$\Downarrow$$

$$B(X,Y)(A) = B(Y,X)(A)$$

зависимость от X только от $X(A)$ и от Y

зависимость от Y только от $Y(A)$ и от X ◄

Т.е. $B: T_A\Sigma \times T_A\Sigma \to N_A\Sigma$

б) $B(X,Y)$ линейно по Y

$\Rightarrow B(X,Y) = B(Y,X)$ ◄

Утв B — симметрическая билинейная форма со значениями в нормальном векторном пр-ве

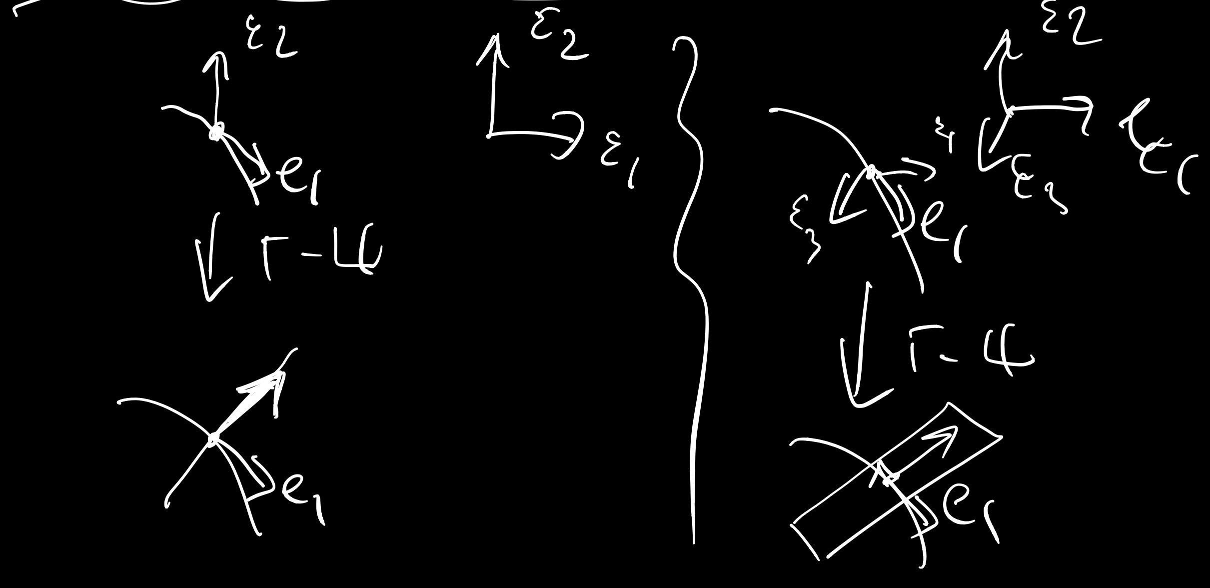
Упр $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, $\dim \Sigma = 2$

$\vec{n}$ поле единичных нормалей.

Тогда $B(X,Y) = \mathrm{II}(X,Y)\vec{n}$

$e_1, .., e_k$ — базис в касательных в. полях, т.е. это такие в. поля, что в любой точке A векторы $e_1(A), .., e_k(A)$ — базис в $T_A\Sigma$.

$n_1, .., n_{n-k}$ — базис в нормальных векторных полях



$$X = X^i e_i \qquad i = 1, .., k$$

$$Y = Y^j e_j \qquad j = 1, \dots, k$$

$$B(X,Y) = B(X^i e_i, Y^j e_j) =$$

$$= X^i Y^j \underbrace{B(e_i, e_j)}_{\text{нормальное в. поле}} = b_{ij}^{\nu}\, n_\nu \quad =$$

$$= X^i Y^j \underbrace{b_{ij}^{\nu}}\, n_\nu, \qquad i,j = 1, \dots, k$$

$$\nu = 1, \dots, n-k$$

b_{ij}^{ν} — локальные коэффициенты B

$$\nabla_X Y = P(\partial_X Y)$$

Опр. ∇ связность в касательном расслоении к поверхности

$\nabla_X Y$ ковариантная производная

Y вдоль X в касательном расслоении поверхности

Св-ва

1) $\nabla : T_A\Sigma \times \Gamma(T\Sigma) \to T_A\Sigma$

или, если X — касательное в. поле,

$$\nabla : \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \to \Gamma(T\Sigma)$$

2) $\nabla_X Y$ линейна по X, т.е.

$$\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$$

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$

▷ из линейности $\partial_X Y$ по X и линейности P ◁

3) $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

▷ прямое вычисление ◁

4) $\nabla_X (fY) = \partial_X f \cdot Y + f \nabla_X Y$

(Тождество Лейбница)

▷ $\nabla_X(fY) = P(\partial_X(fY)) =$

$= P(\partial_X f \cdot Y + f\,\partial_X Y) =$

ф-ция

$= \partial_X f \cdot \underbrace{P(Y)}_{= Y} + f\,\underbrace{P(\partial_X Y)}_{= \nabla_X Y}$ ◁

5) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

(симметричность)

▷ $\nabla_X Y - \nabla_Y X = P(\partial_X Y) - P(\partial_Y X) =$

$= P(\partial_X Y - \partial_Y X) = P(\underbrace{[X, Y]}_{\text{касат}}) =$

$= [X, Y]$ ◁

6) $\partial_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$

(согласованность с метрикой)

$$\partial_X \langle Y, Z\rangle = \langle \partial_X Y, Z\rangle +$$

$$+ \langle Y, \partial_X Z\rangle = \langle P(\partial_X Y) + \underbrace{(\mathrm{Id}-P)(\partial_X Y)}_{\text{норм}}, \underset{\text{касат}}{Z}\rangle +$$

$$+ \langle \underline{Y}, P(\partial_X Z) + \underline{(\mathrm{Id}-P)(\partial_X Z)}\rangle =$$

$$= \langle \underset{\nabla_X Y}{\underset{\parallel}{P(\partial_X Y)}}, Z\rangle + \langle Y, \underset{\nabla_X Z}{\underset{\parallel}{P(\partial_X Z)}}\rangle$$

$$X = X^i e_i \qquad i = 1, \dots, k$$

$$Y = Y^j e_j \qquad j = 1, \dots, k$$

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i e_i}(Y^j e_j) =$$

$$= X^i \nabla_{e_i}(Y^j e_j) =$$

$$= X^i\left((\partial_{e_i} Y^j) e_j + Y^j \overbrace{\nabla_{e_i} e_j}^{\Gamma_{ij}^{l} e_l}\right) =$$

$$= X^i \big(\underbrace{(\partial_{e_i} Y^j) e_j}_{j \to e} + Y^j \Gamma_{ij}^{e} e_e \big) =$$

$$= X^i \big(\partial_{e_i} Y^e + Y^j \Gamma_{ij}^{e} \big) e_e$$

$$\nabla_X Y = X^i \big(\partial_{e_i} Y^e + Y^j \Gamma_{ij}^{e} \big) e_e$$

$$(\nabla_X Y)^e = X^i \big(\partial_{e_i} Y^e + Y^j \Gamma_{ij}^{e} \big)$$

если

$e_i = \frac{\partial}{\partial u^i}, \ldots, e_k = \frac{\partial}{\partial u^k}$, то

$$(\nabla_X Y)^e = X^i \Big(\frac{\partial Y^e}{\partial u^i} + Y^j \Gamma_{ij}^{e} \Big)$$

Γ_{ij}^{e} символ Кристоффеля

$$\nabla_X^{N\Sigma} \xi = (\mathrm{Id} - P)(\partial_X \xi)$$

Опр $\nabla^{N\Sigma}$ связность в нормальном расслоении к поверхности Σ

$\nabla^{N\Sigma}_X \xi$ ковариантная производная ξ вдоль X в нормальном расслоении к Σ

Св-ва

1) $\nabla^{N\Sigma} : T_A\Sigma \times \Gamma(N\Sigma) \to N_A\Sigma$

или

$\nabla^{N\Sigma} : \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(N\Sigma) \to \Gamma(N\Sigma)$

2) $\nabla^{N\Sigma}_X \xi$ линейна по X

3) $\nabla^{N\Sigma}_X(\xi_1+\xi_2) = \nabla^{N\Sigma}_X \xi_1 + \nabla^{N\Sigma}_X \xi_2$

4) $\nabla^{N\Sigma}_X(f\xi) = \partial_X f \cdot \xi + f\nabla^{N\Sigma}_X \xi$

5) $\partial_X \langle \xi, \eta \rangle =$

$$= \langle \nabla^{N\Sigma}_X \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla^{N\Sigma}_X \eta \rangle$$

$X = X^i e_i, \quad i = 1, \dots, k$

$\xi = \xi^\nu \eta_\nu, \quad \nu = 1, \dots, n-k$

$$\nabla^{N\Sigma}_X \xi = \nabla^{N\Sigma}_{X^i e_i} (\xi^\nu \eta_\nu) =$$

$$= X^i \nabla^{N\Sigma}_{e_i} (\xi^\nu \eta_\nu) =$$

$$= X^i \left((\partial_{e_i} \xi^\nu) \eta_\nu + \xi^\nu \underbrace{\nabla^{N\Sigma}_{e_i} \eta_\nu}_{K^\mu_{i\nu} \eta_\mu} \right) =$$

$$= X^i \left(\underbrace{(\partial_{e_i} \xi^\nu) \eta_\nu}_{\nu \to \mu} + \xi^\nu K^\mu_{i\nu} \eta_\mu \right)$$

$$\nabla^{N\Sigma}_X \xi = X^i\left(\partial_i \xi^\mu + \xi^\nu K^\mu_{i\nu}\right) n_\mu$$

$K^\mu_{i\nu}$ локальные коэффициенты связности в нормальном расслоении.

$$W_\xi(X) = -P\left(\partial_X \xi\right)$$

Оператор Вейнгартена (Shape operator)

Св-ва

1) $W : \Gamma(N\Sigma) \times T_A\Sigma \to T_A\Sigma$

2) $\langle W_\xi(X), Y\rangle = \langle B(X,Y), \xi\rangle$

▶ $\langle \xi, Y\rangle = 0$

$$\partial_X \langle \xi, Y\rangle = 0$$

$$\langle \underline{\partial_X \xi}, Y\rangle + \langle \xi, \underline{\partial_X Y}\rangle = 0$$

$$\langle P(\partial_X \xi), Y\rangle + \langle \xi, (\mathrm{Id}-P)(\partial_X Y)\rangle = 0$$

$$-\langle W_\xi(X), Y\rangle + \langle \xi, B(X,Y)\rangle = 0$$

3) $W_\xi(X)(A)$ зависит только от $\xi(A)$ и $X(A)$, т.е.

$$W : N_A\Sigma \times T_A\Sigma \to T_A\Sigma$$

если зафиксировано ξ, то

$$W_\xi : T_A\Sigma \to T_A\Sigma$$

4) $W_\xi(X)$ линейна и по ξ, и по X

$X = X^i e_i$, $i = 1,\dots,k$

$\xi = \xi^\nu \eta_\nu$, $\nu = 1,\dots,n-k$

$$W_\zeta(X) = W_{\zeta^\nu \eta_\nu}(X^i e_i) =$$

$$= X^i \zeta^\nu \underbrace{W_{\eta_\nu}(e_i)}_{\omega_{\nu i}^{j} e_j} \Rightarrow$$

$$W_\zeta(X) = X^i \zeta^\nu \omega_{\nu i}^{j} e_j$$

Подставим в

$$\langle W_\zeta(X), Y \rangle = \langle B(X,Y), \zeta \rangle$$

$$X = e_i,\ \zeta = \eta_\nu,\ Y = e_j$$

$$\langle W_{\eta_\nu}(e_i), e_j \rangle = \langle B(e_i, e_j), \eta_\nu \rangle$$

$$\langle \underline{\omega_{\nu i}^{l}} e_l, e_j \rangle = \langle \underline{b_{ij}^{\mu}} \eta_\mu, \eta_\nu \rangle$$

$$w_{\nu i}^{l}\underbrace{\langle e_l, e_j\rangle}_{g_{lj}\ (k\times k)} = b_{ij}^{\mu}\langle n_\mu, n_\nu\rangle$$

$$\langle n_\mu, n_\nu\rangle = g_{\mu\nu} \quad (n-k)\times(n-k)$$

матричный элемент матрицы $I_A = \langle,\rangle|_{T_A\Sigma}$, то есть матрицы первой квадратичной формы.

матрица $\langle,\rangle|_{N_A\Sigma}$ метрика в нормальном расслоении

$$\boxed{w_{\nu i}^{l} g_{lj} = b_{ij}^{\mu} g_{\mu\nu}}$$

$$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$$

$$G = (g_{ij})$$

$$G^{-1} = (g^{ij})$$

$$\underbrace{g_{lj}g^{jm}}_{\sum_j} = \delta_l^m \Leftrightarrow GG^{-1} = E$$

$$w_{\nu i}^{l}\,\underline{g_{lj}g^{jm}} = b_{ij}^{\mu} g_{\mu\nu} g^{jm}$$

$$\underline{w_{\nu i}^{l}\,\delta_l^m} = b_{ij}^{\mu} g_{\mu\nu} g^{jm}$$

$$\boxed{w_{\nu i}^{\;\;m} = b_{ij}^{\mu} g_{\mu\nu} g^{jm}}$$

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)$$

$$\partial_X \xi = -W_\xi(X) + \nabla_X^{N\Sigma} \xi$$

Деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена

$X = e_i,\ Y = e_j,\ \xi = \eta_\nu$

$$\partial_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^{l} e_l + b_{ij}^{\nu} \eta_\nu$$

$$\partial_{e_i} \eta_\nu = -b_{ij}^{\mu} g_{\mu\nu} g^{jm} e_m + K_{i\nu}^{\mu} \eta_\mu$$

Деривационная ф-ла Гаусса-Вейнгартена

плоская кривая в натуральном параметре

$$\partial_v v = k n$$

$$\Updownarrow$$

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad b^1_{11} = k$$

$$\partial_v n = - k v$$

$$\Updownarrow$$

$$b_{11} = k, \quad K^1_{11} = 0$$

Деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена — это многомерное обобщение формулы Френе