

Листок 4.

Задача 1. Найдите все функции f , для которых множество вещественных чисел \mathbb{R} является метрическим пространством с метрикой $\varrho(x, y) = |f(x) - f(y)|$. Обязательно ли это метрическое пространство быть полным? Всегда ли в этом метрическом пространстве существует счетное всюду плотное множество (т.е. в каждом открытом шаре есть точка этого множества)?

Задача 2. Функция g определена на $[0, +\infty)$ и является вогнутой, т.е.

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y)$$

для всех $x, y \in [0, +\infty)$ и $\alpha \in [0, 1]$. Предположим также, что $g(0) = 0$ и $g(x) > 0$ при $x > 0$. Докажите, что для всякой метрики ϱ , функция $g(\varrho)$ является метрикой. Проверьте, что можно в качестве g взять $g(t) = \frac{t}{1+t}$, $g(t) = \arctg t$, $g(t) = \min\{1, t\}$.

Задача 3. Придумайте примеры полных метрик на плоскости \mathbb{R}^2 , таких что

(а) любые два открытых шара с центром в нуле не совпадают с точностью до растяжения в α раз,

(б) два открытых шара с центрами в нуле и единице радиуса 1 не совпадают с точностью до параллельного переноса,

(с) открытый шар с центром в нуле единичного радиуса не является выпуклым множеством.

Задача 4. Пусть $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Многочлен

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

называется производной многочлена P . Проверьте, что $(PQ)' = PQ' + P'Q$. Докажите, что если P – многочлен степени n , то

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{P^{(n)}(0)x^n}{n!}.$$

Пусть P_n – множество многочленов степени не выше n . При каком k функция

$$\varrho(h, g) = \sum_{j \leq k} |h^{(j)}(0) - g^{(j)}(0)|$$

будет метрикой. Будет ли такое пространство полным?

Задача 5. Приведите пример метрического пространства, в котором шар большего радиуса содержится строго внутри шара меньшего радиуса.

Задача 6. Всякое ли метрическое пространство из четырех точек можно изометрично (изометрия – отображение, сохраняющее расстояния) вложить в \mathbb{R}^3 ?

Задача 7. Пусть $X = \{0, 1\}^n$, $\varrho(x, y) = \sum_j |x_j - y_j|$.

(а) Найдите число элементов в шаре радиуса k .

(б) (код Хэмминга) Рассмотрим следующий способ передачи последовательности из 0 и 1, при котором по полученной последовательности можно исправить ровно одну ошибку, т.е. узнать в каком бите произошла эта ошибка. В последовательности из $2^m - 1$ битов биты с номерами 1, 2, 4, ... назовем служебными, а в остальные биты запишем информацию, которую хотим передать. В служебный бит с номером 2^k запишем сумму (по модулю 2) цифр в битах, номера которых в двоичной записи содержат 1 на k -м месте. Тогда сумма цифр в битах (включая служебный), номера которых в двоичной записи содержат 1 на k -м месте, равна нулю. После получения последовательности для каждого k вычисляем сумму цифр в битах, номера которых в двоичной записи содержат 1 на k -м месте. Покажите, что в итоге получается номер бита, при передаче которого произошла ошибка.

(с) Докажите, что при $n = 2^m - 1$ булев куб $X = \{0, 1\}^n$ можно представить в виде объединения непересекающихся шаров единичного радиуса, а при других значениях n этого сделать нельзя.

Задача 8. (Принцип вложенных шаров) Докажите, что в полном метрическом пространстве всякая последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку. Покажите на примере, что в принципе вложенных шаров нельзя отказаться от предположения, что радиусы шаров стремятся к нулю. Покажите, что в неполном пространстве принцип вложенных шаров не выполняется.

Задача 9. Предположим, что метрическое пространство обладает следующим свойством: из всякой последовательности его элементов можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть для каждого m задана последовательность $\{x_n^m\}_{n=1}^\infty$ элементов этого метрического пространства. Докажите существование такой возрастающей последовательности номеров n_k , что для каждого m последовательность $\{x_{n_k}^m\}_{k=1}^\infty$ сходится.

Задача 10. Рассмотрим множество \mathbb{R}^∞ бесконечных последовательностей вещественных чисел.

(а) Будем говорить, что последовательность $x^N = (x_n^N)$ сходится к $x = (x_n)$, если существует номер M такой, что $x_n^N = x_n$ для всех N при $n > M$ и для каждого $n \leq M$ $x_n^N \rightarrow x_n$ при $N \rightarrow \infty$. Покажите, что такая сходимость не задается метрикой, т.е. не существует метрики ρ такой, что $\rho(x^N, x) \rightarrow 0$ равносильно $x^N \rightarrow x$.

(б) Будем говорить, что последовательность $x^N = (x_n^N)$ сходится к $x = (x_n)$, если для каждого n $x_n^N \rightarrow x_n$ при $N \rightarrow \infty$. Покажите, что такую сходимость можно задать полной метрикой.

Задача 11. (Теорема Банаха о сжимающем отображении) Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство.

(а) Докажите, что если $\rho(x_n, x_{n-1}) \leq q^n$, $0 < q < 1$, то последовательность x_n удовлетворяет условию Коши и сходится.

(б) Пусть отображение $f: X \rightarrow X$ является сжимающим, т.е.

$$\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y), \quad 0 < q < 1.$$

Тогда последовательность x_n , заданная рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

сходится и ее предел является единственным решением уравнения $x = f(x)$ (говорят, что x – неподвижная точка).

(с) Докажите, что числовая последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_1 = 1$, сходится и найдите ее предел, если $f(x) = \sqrt{2+x}$ или $f(x) = 2 + 1/x$.

Задача 12. Существует ли неполное метрическое пространство, в котором всякое сжимающее отображение имеет неподвижную точку?